

**Exercice 1 :**

Dans chacun des cas déterminer le *PGCD* et le *PPCM* des entiers  $a$  et  $b$  :

1.  $a = 60$  et  $b = 45$
2.  $a = 2004$  et  $b = 9185$
3.  $a = 5000$  et  $b = 1515$

**Exercice 2 :**

Quelques questions :

1. On veut découper un rectangle de 60 cm sur 45 cm en carrés dont le côté est le plus grand possible, sans perte.  
Quel doit être le côté du carré ?
2. On dispose d'un grand nombre de rectangles de 24 cm sur 40 cm, que l'on souhaite assembler bord à bord pour former un carré, le plus petit possible.  
Quel doit être le côté du carré ?
3. Trouver la plus petite période de la fonction :  $f : x \mapsto \cos\left(\frac{2\pi}{35}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{49}\right)$
4. Déterminer les entiers naturels  $n$  inférieurs à 200 tels que  $PGCD(n; 324) = 12$
5. Soit  $a = 2^4 \times 3^3 \times 5^1 \times 7^3 \times 13$  et  $b = 2^2 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^2 \times 11$   
Déterminer  $PGCD(a; b)$  et  $PPCM(a; b)$ .

**Exercice 3 :**

- (a) Démontrer que  $3 \times 2^{916773} + 1$  est premier avec 2 et 3.
- (b) Démontrer que deux entiers consécutifs sont premiers entre eux.
- (c) Soient  $p$  et  $q$  deux entiers tels que  $7p - 5q = 1$ 
  - i. Démontrer que  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux.
  - ii. Pouvez-vous trouver un couple satisfaisant la relation  $7p - 5q = 1$  ?
- (d) Démontrer que, quel que soit l'entier naturel  $n$ , les fractions suivantes sont irréductibles :
  - i.  $\frac{n}{2n+1}$
  - ii.  $\frac{4n+3}{3n+2}$
- (e) Pour quels entiers  $n$  les fractions suivantes sont-elles irréductibles ?
  - i.  $\frac{2n+3}{n+3}$
  - ii.  $\frac{3n-2}{3n-1}$
- (f) Soit  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ .  
On pose  $A = x + y$  et  $B = 2x + 3y$ .
  - i. Démontrer que tout diviseur commun à  $x$  et  $y$  divise  $A$  et  $B$ .
  - ii. Exprimer  $x$  et  $y$  en fonction de  $A$  et  $B$ .  
Démontrer que tout diviseur commun à  $A$  et  $B$  divise  $x$  et  $y$ .
  - iii. Démontrer que  $2^n + 3^n$  et  $2^{n+1} + 3^{n+1}$  sont premiers entre eux pour tout  $n$  entier naturel.