Exercice 1 :
On suppose que $a \equiv 3(17)$ et $b \equiv 5(17)$

1. Démontrer que $4a + b$ est un multiple de 17.
2. Démontrer que $7a + 5b \equiv 12(17)$.
3. Démontrer que $a^2 + b^2$ est un multiple de 17.
4. Déterminer le reste de la division euclidienne de $a^3 + 3b^2$ par 17.

Exercice 2 :

1. On note n un entier naturel.
   Quels sont les restes possibles des divisions euclidiennes de l'entier n^2 par 5 ?
2. On note n un entier naturel.
   Quels sont les restes possibles des divisions euclidiennes de l'entier n^3 par 7 ?
3. (a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^{n+4} \equiv 2^n(5)$
   (b) Trouver, sans l'aide de la calculatrice, le reste de la division euclidienne de 12^{1527} par 5 .
4. (a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $5^{n+6} \equiv 5^n(7)$
   (b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^{n+6} \equiv 2^n(7)$
   (c) Trouver, sans l'aide de votre calculatrice, le reste de la division euclidienne de $19^{52} \times 23^{41}$ par 7.

Exercice 3 : (**Les critères de divisibilité**)
On note x un nombre entier naturel.
On note $n = \overline{a_p a_{p-1} \dots a_3 a_2 a_1 a_0}$ en base 10

1. Démontrer que $2|n \Leftrightarrow a_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$
2. Démontrer que $3|n \Leftrightarrow 3|\displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k$
3. Démontrer que $3|n \Leftrightarrow 9|\displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k$
4. Démontrer que $4|n \Leftrightarrow 4|10a_1 + a_0$
5. Démontrer que $5|n \Leftrightarrow a_0 \in \{0, 5\}$
6. Démontrer que $7|n \Leftrightarrow 7|(\overline{a_p a_{p-1} \dots a_3 a_2 a_1} - 2a_0)$
7. (a) Trouver, suivant les valeurs de k, les valeurs de m sachant que $10^k \equiv m(11)$.
   (b) Si p est pair démontrer que $11|n \Leftrightarrow 11|[(a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_p) - (a_1 + a_3 + a_4 + \dots + a_{p-1})]$
   (c) Si p est impair démontrer que $11|n \Leftrightarrow 11|[(a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{p-1}) - (a_1 + a_3 + a_4 + \dots + a_p)]$
8. Démontrer que $13|n \Leftrightarrow 13|(\overline{a_p a_{p-1} \dots a_3 a_2 a_1} + 4a_0)$