

Exercices tirés de 184 exercices corrigés d'Arithmétique, de Joachim LLORCA.  
(Edition Ellipses)

On note  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a = 6k + 5$  et  $b = 8k + 3$ .

Montrer qu'il n'existe que deux diviseurs positifs communs à  $a$  et  $b$ .

2. Démontrer que  $\forall a \in \mathbb{Z}$ ,  $N = a(a^2 - 1)$  est un multiple de 6.
3. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs  $n$  tels que  $(n - 3)$  divise  $(2n + 1)$ .
4. Déterminer l'ensemble des entiers naturels  $n$  tels que  $(n + 1)$  divise  $n^2 - n + 3$ .
5. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs  $n$  tels que la fraction  $\frac{3n + 8}{n + 4}$  peut se simplifier sous la forme d'un entier relatif.
6. Trouver tous les couples d'entiers relatifs  $(x; y)$  tels que  $x^2 - y^2 = 13$ .
7. (a) Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $3n^4 + 5n + 1$  est impair.  
(b) En déduire que  $3n^4 + 5n + 1$  n'est pas divisible par  $n(n + 1)$ .
8. Démontrer que pour tout entier relatif  $n$  l'entier  $n^3 - n$  est divisible par 3.
9. Démontrer que tout entier naturel de la forme  $\overline{xyyx}$  est un multiple de 11.
10. Démontrer que pour tout entiers naturels  $a$  et  $b$ , le nombre  $(a + b)^7 - (a^7 + b^7)$  est un multiple de 7.
11. Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 1.
  - (a) Démontrer que  $9^{n+1} - 2^{n+1} = 11(9^n - 2^n) - 18(9^{n-1} - 2^{n-1})$ .
  - (b) Démontrer, par récurrence sur  $n$ , que  $3^{2n} - 2^n$  est divisible par 7.
12. On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $u_n = (3n - 1)^2 - 2 + (-2)^n$ .
  - (a) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  :  $u_{n+1} + 2u_n$  est un multiple de 27.
  - (b) Démontrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  est un multiple de 27.
13. Soit  $n = \overline{cd\bar{u}}$  un entier de trois chiffres divisible par 107.  
Démontrer que l'entier  $x = 7d^2 + (7c - u)^2$  est aussi un multiple de 107.
14. Démontrer que tous les termes de la suite définie pour  $n \geq 0$  par  $u_n = n(n + 1)(2n + 1)(3n^2 + 3n - 1)$  sont des multiples de 30.  
On pourra calculer  $u_{n+1} - u_n$ .