1. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   (b) En déduire la valeur de $A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2$

2. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
   (b) En déduire la valeur de $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 10^3$

3. Pour les deux suites ci-dessous, calculer les premiers termes puis conjecturer une formule explicite de u_n et la démontrer par récurrence.
   (a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$
   (b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $u_1 = \dfrac{1}{3}$ et $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{3n} u_n$

4. Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, $n^3 - n$ est un multiple de 3.

5. (a) Développer, réduire et ordonner $(n+1)^5$
   (b) En déduire, que pour tout entier $n \geq 0$, $n^5 - n$ est un multiple de 5.

6. On nomme P le polynôme $P(x) = x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 14x + 13$
   On souhaite montrer par l'absurde que P ne se factorise pas par $(x-a)$ ou que $P(x)$ ne peut pas s'écrire sous la forme $(x-a)Q(x)$ avec Q un polynôme de degré $d^\circ P - 1$
   (a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x^2 - 2x + 3)^2 + (x^2 - 2x + 3) + 1$
   (b) Étudier le signe du trinôme : $x^2 + x + 1$
   (c) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) > 0$
   (d) Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que P se factorise par $x - a$.
      i. Démontrer que $P(a) = 0$
      ii. Conclure

7. Démontrer la proposition suivante :
   Si a n'est pas un nombre premier, alors chaque division qui tombe juste $a = b.c$ est telle que l'un des deux nombres b ou c est inférieur ou égal à $\sqrt{a}$.

8. On note p un nombre entier naturel.
   Démontrer par l'absurde que si p^2 est pair alors p est pair.
   En déduire que p pair $\Leftrightarrow$ p^2 pair

9. On admet le résultat suivant :
   Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 admet un diviseur premier.
   Démontrer la propriété suivante :
   L'ensemble des nombres premiers est infini.