Niveau :

Terminale S

Titre Cours :

Chapitre 04

Compléments sur les fonctions.
Fonctions trigonométriques et dérivabilité.

Jospeh Fourier
(21 mars 1768-16 mai 1830)

Année :

2014-2015

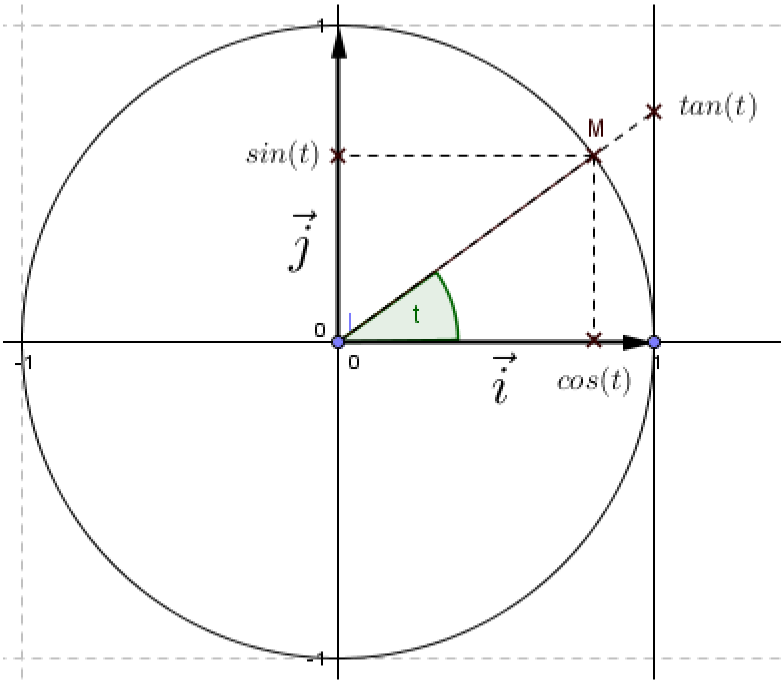
Citation du moment :

« L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques." (Joseph Fourier)
Discours préliminaire à la théorie analytique de la chaleur.

I. Fonctions trigonométriques (Sinus et Cosinus)

1. Rappels et Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. A tout réel t, on associe un unique point M sur le cercle trigonométrique. Dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ le point M a pour coordonnées : $M\left(\cos(t);\sin(t)\right)$



Définition 01 :

- La fonction qui à tout réel t, associe le nombre $\cos(t)$, est appelée la fonction cosinus / $\cos : t \mapsto \cos(t)$
- La fonction qui à tout réel t, associe le nombre $\sin(t)$, est appelée la fonction sinus / $\sin : t \mapsto \sin(t)$
- La fonction qui à tout réel t, associe le nombre $\tan(t)$, est appelée la fonction tangente / $\tan : t \mapsto \tan(t) = \dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}$

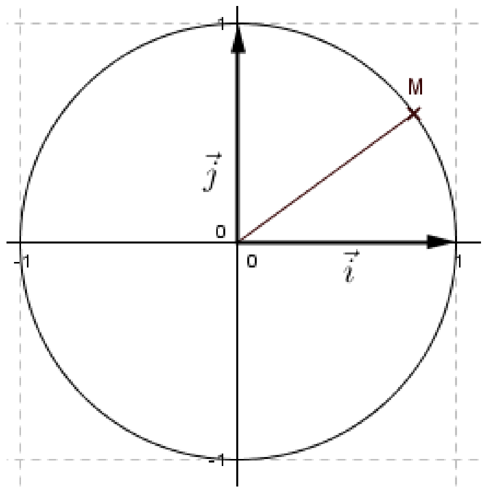
Remarque : La fonction tangente n'est pas au programme de terminale mais il est intéressant de la connaître et de savoir ce que cela représente sur le cercle trigonométrique.

2. Propriétés et interprétations graphiques

Définition 02 :

La fonction cosinus est paire sur $\mathbb{R}$

$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos(-t) = \cos(t)$

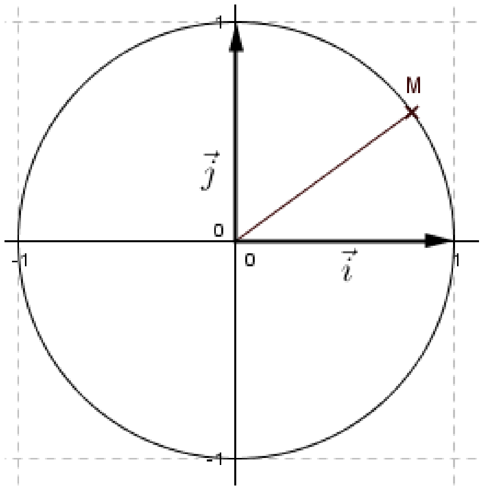


Interprétation graphique :

Définition 03 :

La fonction sinus est impaire sur $\mathbb{R}$

$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sin(-t) = -\sin(t)$

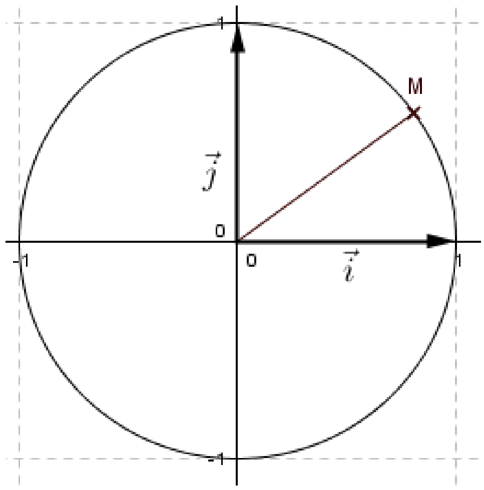


Interprétation graphique :

Définition 04 :

Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π sur $\mathbb{R}$

- $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos(t+2\pi) = \cos(t)$
- $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sin(t+2\pi) = \sin(t)$



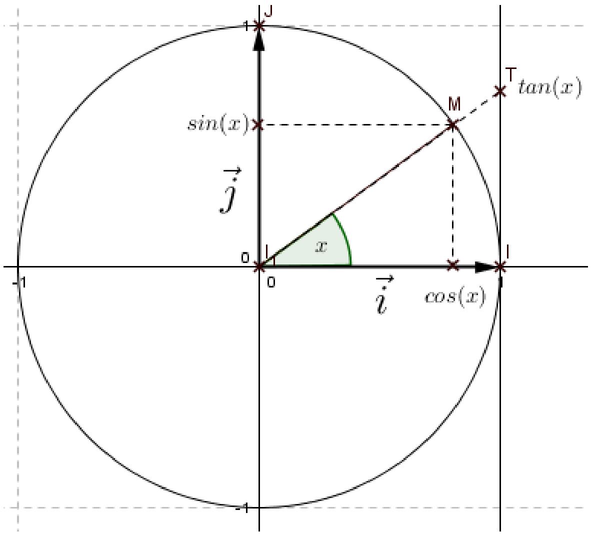
Interprétation graphique :

3. Dérivation.

Théorème 01 :

$$\lim_{x \mapsto 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Démonstration :



1) A l'aide des aires des triangles OIM, OIT et du secteur angulaire OIM, montrer que pour tout $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right]$: $\sin x \leq x \leq \tan x$ puis en déduire que $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$

2) Conclure

Théorème 02 :

$$\lim_{x \mapsto 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

Démonstration :

1) Montrer que pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2};0\right[\cup \left]0;\frac{\pi}{2}\right]$: $\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{-\sin x}{\cos x + 1}$

2) Conclure

Théorème 03 :

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos'(x) = -\sin(x)$$
$$\sin'(x) = \cos(x)$$

Démonstration :

4. Etude complète et représentation graphique des fonctions cosinus et sinus.

$f : x \mapsto \cos x$ définie sur $\mathbb{R}$

1. *f* est périodique de période 2π donc on peut étudier la fonction sur $[-\pi;\pi]$ puis on construit toute la courbe en reportant celle de la période.
2. *f* est paire donc on peut étudier la fonction sur $[0;\pi]$ puis par symétrie par rapport à (Oy) on obtient la courbe sur $[-\pi;\pi]$.
3. *f* est dérivable $[0;\pi]$ et $f'(x) = -\sin x$. Or sur $[0;\pi]$, $\sin x \geq 0$ donc *f* est décroissante sur $[0;\pi]$.
4.

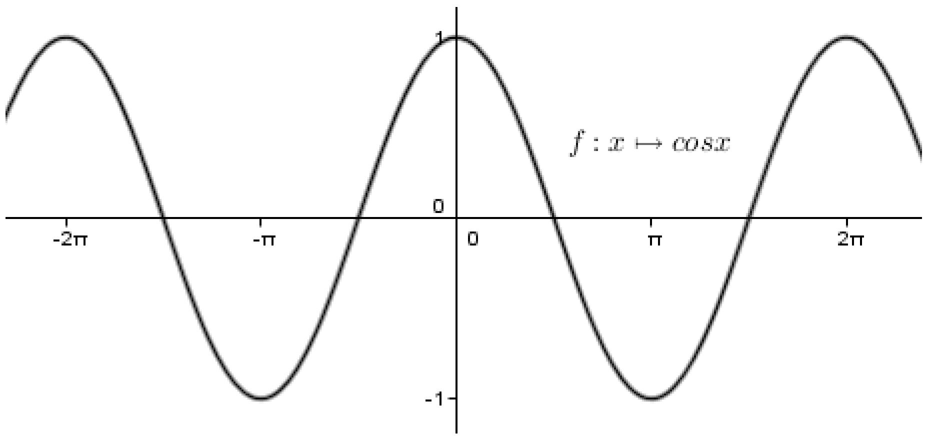
x	0		π
$f'(x)$	0	$-$	0
f	1	$\searrow$	-1

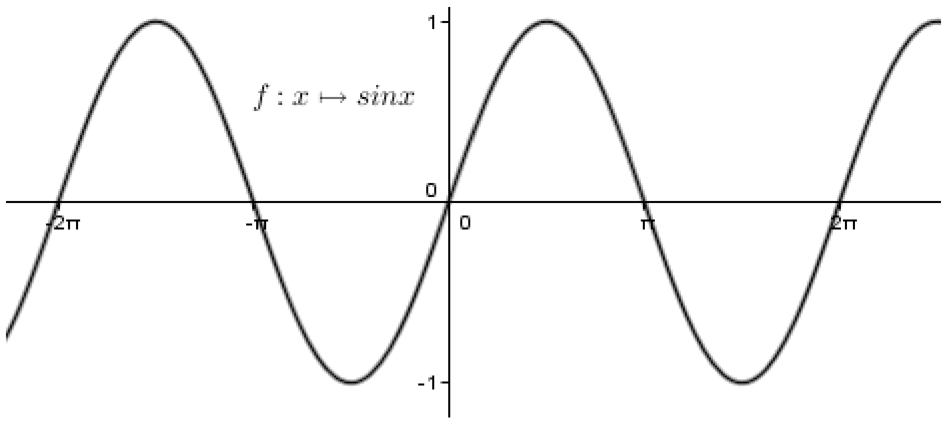
$f : x \mapsto \sin x$ définie sur $\mathbb{R}$

1. *f* est périodique de période 2π donc on peut étudier la fonction sur $[-\pi;\pi]$ puis on construit toute la courbe en reportant celle de la période.
2. *f* est impaire donc on peut étudier la fonction sur $[0;\pi]$ puis par symétrie par rapport à O(0 ;0) on obtient la courbe sur $[-\pi;\pi]$.
3. *f* est dérivable $[0;\pi]$ et $f'(x) = \cos x$.
4.

x	0		$\pi/2$		π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Représentation graphique des deux fonctions





II. Compléments sur la dérivation.

1. Rappels

f est définie sur un intervalle I et $a \in I$

- *f* est dérivable en a si $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe, est unique et est finie. Dans ce cas on note $f'(a)$ le nombre dérivé de *f* en *a* et $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
- Lorsque *f* est dérivable sur un intervalle I, on note *f'* la fonction qui à *x* de I associe le nombre dérivé *f'*(*x*) donc $f' : x \mapsto f'(x)$
- Géométriquement, $f'(a)$ représente le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point de coordonnées $(a; f(a))$

2. Calculs de dérivées

a. $g : x \mapsto f(ax+b)$

Théorème :

Soit a et b deux réels et f une fonction dérivable sur un intervalle I. Pour tout x tel que $ax+b \in I$, la fonction $g : x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable en x et

$$g'(x) = a \times f'(ax+b)$$

Démonstration :

On note $h \neq 0$, $x_0 \in D_g$ et $x_0 + h \in D_g$

1. Calculer $\tau_g(h) = \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$
2. En posant $y_0 = ax_0 + b$ et $H = ah$ montrer que $\tau_g(h) = a \times \frac{f(y_0+H)-f(y_0)}{H}$
3. Conclure

b. $g: x \mapsto \sqrt{f(x)}$

Théorème :

Si f est une fonction définie et dérivable sur I, strictement positive sur I, alors la fonction $g: x \mapsto \sqrt{f(x)}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

Démonstration :

On note $h \neq 0$, $x_0 \in D_g$ et $x_0 + h \in D_g$

1. Montrer que
$$\tau_g(h) = \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \times \frac{1}{\sqrt{f(x_0+h)} + \sqrt{f(x_0)}}$$

2. Conclure

c. $g : x \mapsto \left(f(x)\right)^n = f^n(x)$ où $n \in \mathbb{Z}^*$

Théorème : $n \in \mathbb{Z}^*$

Si u est une fonction dérivable sur I et ne s'annulant pas sur I dans le cas où $n < 0$, alors la fonction $g : x \mapsto \left(u(x)\right)^n = u^n(x)$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$g'(x) = n \times u'(x) \times u^{n-1}(x)$$

Démonstration :

1) Démontrer le théorème, par récurrence, pour $n \in \mathbb{N}^*$

2) En déduire la démonstration pour $n \in \mathbb{Z}^{*-}$

d. $g : x \mapsto \left(f \circ u\right)(x) = f(u(x))$

Théorème :

Si u est une fonction dérivable sur I et f dérivable sur u(I), alors la fonction $g : x \mapsto f \circ u(x) = f(u(x))$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$g'(x) = u'(x) \times f'(u(x))$$

Démonstration :

1) Déterminer $\lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{f(u(x_0+h)) - f(u(x_0))}{u(x_0+h) - u(x_0)}$ et $\lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{u(x_0+h) - u(x_0)}{h}$

2) Conclure.

III. Exemples

Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

1. $g : x \mapsto \cos(\pi x + 1)$
2. $g : x \mapsto \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$
3. $g : x \mapsto \sqrt{3 - 2x}$
4. $g : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$
5. $g : x \mapsto \sqrt{3x^2 + 5}$
6. $g : x \mapsto (2x^3 - 5x + 1)^7$
7. $g : x \mapsto \dfrac{1}{(3x^2+1)^4}$