

DM04 (Terminale S)

« Toute la géographie, la trigonométrie et l'arithmétique du monde ne servent à rien si tu n'apprends pas à penser par toi-même. » (Carlos Ruiz Zafón)

Exercice 01 :

Dans cet exercice, x désigne un réel dans $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = \cos x$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$$

1. Démontrer que pour tout x réel : $\sin(2x) = 2 \cos x \sin x$

2. On note $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $v_n = u_n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$

Démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{2} \sin(2x)$

3. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n .

4. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n .

5. A l'aide d'un programme informatique, vérifier que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(u_n - \frac{\sin(2x)}{2x} \right) = 0$$

Que peut-on en déduire sur $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

6. En déduire une suite qui converge vers $\frac{2}{\pi}$

7. En déduire une suite qui converge vers π

Exercice 02 : FACULTATIF

On rappelle que si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{R}$ alors $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Sachant que pour tout a et b réel

1. Démontrer que pour a et b de $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \times \tan b}$$

2. Démontrer que pour a et b de $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}$$

3. En déduire la valeur exacte de $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Date :

A rendre le
mercredi 4
novembre.

Un peu d'Histoire :



Hipparque de Nicé

-190 / -120

Il construisit les premières tables trigonométriques sous la forme de tables de cordes : elles faisaient correspondre à chaque valeur de l'angle au centre (avec une division du cercle en 360°), la longueur de la corde interceptée dans le cercle, pour un rayon fixe donné.