Sujet d'oral (Tle Maths complémentaires)

Exercice :

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{3e^{\frac{x}{4}}}{2+e^{\frac{x}{4}}}$

1) Démontrer que $f(x) = \dfrac{3}{1+2e^{-\frac{x}{4}}}$

2) Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

3) Étudier les variations puis dresser le tableau de variations de f.

Partie B

1) On a étudié l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, en centaine d'individus, au temps t, en années, est notée $g(t)$. La fonction g, définie de l'intervalle $[0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, modèle choisi pour décrire cette évolution , est une solution de l'équation différentielle : $(\mathrm{E}_1)\ :\ y' = \dfrac{y}{4}$.

   a) Résoudre l'équation différentielle (E_1).

   b) Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0) = 1$.

   c) Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

2) En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre de rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions

$$(\mathrm{E}_2)\ :\ \begin{cases} u'(t) = \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{u^2(t)}{12} & \forall t \in \mathbb{R}_+^* \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

   a) On suppose que u ne s'annule pas pour $t > 0$.

   Soit la fonction h définie sur $[0\,;+\infty[$ par $h = \dfrac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si, et seulement si, la fonction h satisfait aux conditions :

$$(\mathrm{E}_3)\ :\ \begin{cases} h'(t) = -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12} & \forall t \in \mathbb{R}_+^* \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

   b) Donner les solutions de l'équation différentielle : $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$.

   et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

   c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$