

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.

Durée : 1 heure / Calculatrice autorisée : **oui**.

Merci d'encadrer vos résultats et d'écrire lisiblement.

Exercice 01 : (10 points)

Les organismes vivants contiennent naturellement du carbone 14 (éléments radioactifs) provenant des rayons cosmiques, qui est constamment renouvelé et qui se maintient à la valeur de 15,3 unités. À leur mort, l'assimilation cesse et le carbone 14 présent se désintègre. On note $f(t)$ la concentration en carbone 14 dans un organisme à l'instant t après sa mort (t exprimé en milliers d'années).

On admet que f est une solution sur $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle (E) $y' = -0,124y$.

- Déterminer les solutions de (E).
- Sachant que $f(0) = 15,3$ justifiez que la seule solution est $f(t) = 15,3e^{-0,124t}$.
- Déterminer f' la fonction dérivée de f .
- Déterminer la limite de f au voisinage de l'infini. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.
- Déterminer les variations de f sur $[0; +\infty[$.
- Montrer que l'équation $f(t) = 7,27$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$.
- Donner un encadrement de α à 10^{-4} puis une valeur approchée à 10^{-3} près.
- Des archéologues ont trouvé des fragments d'os présentant une concentration en carbone 14 égale à 6 unités. Justifiez que l'on peut estimer l'âge de ces fragments d'os à 7 549 ans.
- Lorsque la concentration en carbone 14 d'un organisme devient inférieure à 0,3 % de sa valeur initiale on ne peut pas dater raisonnablement à l'aide du carbone 14. Déterminer l'âge à partir duquel un organisme ne peut plus être daté à l'aide du carbone 14.

Exercice 02 : (10 points)

Résoudre les équations différentielles ci-dessous :

- $y' - 6y = 0$
- $y' + 0,05y = 3$
- $2y' = 3y - 2x + 5$
- $y' + \frac{k}{m}y = g$ où k, m, g sont des constantes réelles.
- $y' = 0,04y + 2e^t$

Exercice Bonus : (3 points)

Montrer que $T(t) = -\frac{P}{hs}e^{-\frac{1}{\alpha}t} + \frac{P}{hs} + T$ est solution de l'équation différentielle

$$\alpha y' + y = \frac{P}{hs} + T$$

où α, P, h, s et T sont des constantes réelles.

Exercice 02 : (10 points)

Résoudre les équations différentielles ci-dessous :

1. $y' + 7y = 0$

2. $y' - 0,05y = 3$

3. $2y' = -4y + 5x - 1$

4. $y' - \frac{1}{\lambda} \times y = \frac{R}{\lambda}$ où λ, R sont des constantes réelles.

5. $y' = -2y + 3e^{-t}$

Exercice Bonus : (2 points)

Résoudre l'équation $\tau \times y' + 2y = \frac{P}{hs} + T_0$ où τ, P, h, s, T_0 sont des constantes réelles.