La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront
de façon importante dans l'appréciation des copies.
Durée : 1 heure / Calculatrice autorisée : **oui**.
Merci d'encadrer vos résultats et d'écrire lisiblement.

Exercice : (20 points)

Dans une réserve naturelle, on étudie l'évolution de la population d'une race de singes en voie d'extinction à cause d'une maladie.

Partie A

Une étude sur cette population de singes a montré que leur nombre baisse de 15 % chaque année.
Au 1er janvier 2004, la population était estimée à 25000 singes.
A l'aide d'une suite, on modélise la population au 1er janvier de chaque année. Pour tout entier naturel n, le terme u_n de la suite représente le nombre de singes au 1er janvier de l'année $2004 + n$. On a ainsi $u_0 = 25000$.

1. Calculer l'effectif de cette population de singes :
   (a) au 1er janvier 2005 ;
   (b) au 1er janvier 2006, en arrondissant à l'entier.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 25000 \times 0,85^n$.
3. Étudier les variations de (u_n).
4. Déterminer au bout de combien d'années après le 1er janvier 2004 le nombre de singes sera inférieur à 5000.

Partie B

Au 1er janvier 2014, une nouvelle étude a montré que la population de cette race de singes, dans la réserve naturelle, ne comptait plus que 5000 individus. La maladie prenant de l'ampleur, on met en place un programme de soutien pour augmenter le nombre de naissances. À partir de cette date, on estime que, chaque année, un quart des singes disparaît et qu'il se produit 400 naissances.
On modélise la population de singes dans la réserve naturelle à l'aide d'une nouvelle suite. Pour tout entier naturel n, le terme v_n de la suite représente le nombre de singes au 1er janvier de l'année $2014 + n$. On a ainsi $v_0 = 5000$.

1. (a) Calculer v_1 et v_2.
   (b) justifier que, pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} = 0,75 \times v_n + 400$.
   (c) Déterminer la seule suite constante (v_n) vérifiant $v_{n+1} = 0,75 \times v_n + 400$.
2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - 1600$.
   (a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $0,75$. Préciser la valeur de w_0.
   (b) Pour tout entier naturel n, exprimer w_n en fonction de n.
   (c) En déduire que pour tout entier naturel n, on a $v_n = 1600 + 3400 \times 0,75^n$.
   (d) Étudier les variations de (v_n).
   (e) Déterminer au bout de combien d'années après le 1er janvier 2004 le nombre de singes sera inférieur à 2000.

Exercice Bonus : (4 points)

Déterminer les limites ci-dessous :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(3+\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4-5n}{2n-5}$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-7n+1}{3n^3-4}$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$