# LE CALCUL D'INTÉGRALES

L'étude et le calcul des intégrales apparait dans des domaines très variés des sciences. Calcul de longueur d'une courbe, calcul d'aire, de volume, de flux, de vitesse et accélération moyenne, calcul de probabilité, résolution des équations différentielles, calcul de clairance en médecine, etc.
Leibniz, Riemann et Lebesgue sont les principaux mathématiciens qui ont introduit et développé ce domaine des mathématiques.

**Les contenus du chapitre**

▷ Définition de l'intégrale d'une fonction continue positive définie sur un segment $[a,b]$, comme aire sous la courbe représentative de $f$. Notation $\int_a^b f(x)dx$.
▷ Théorème : si $f$ est une fonction continue positive sur $[a,b]$ alors la fonction $F_a$ définie sur $[a,b]$ par $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de $f$ qui s'annule en $a$.
▷ Sous les hypothèses du théorème, relation $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ où $F$ est une primitive quelconque de $f$. Notation $[F(x)]_a^b$.
▷ Théorème : toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.
▷ Définition par les primitives de $\int_a^b f(x)dx$ lorsque $f$ est une fonction continue de signe quelconque sur un intervalle contenant $a$ et $b$.
▷ Linéarité, positivité et intégration des inégalités. Relation de Chasles.
▷ Valeur moyenne d'une fonction.
▷ Intégration par parties.

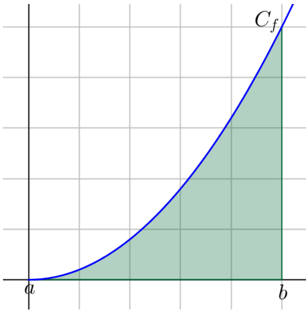
**Les capacités attendues du chapitre**

▷ Estimer graphiquement ou encadrer une intégrale, une valeur moyenne.
▷ Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive, à l'aide d'une intégration par parties.
▷ Majorer (minorer) une intégrale à partir d'une majoration (minoration) d'une fonction par une autre fonction.
▷ Calculer l'aire entre deux courbes.
▷ Interpréter une intégrale, une valeur moyenne dans le contexte d'une autre discipline.

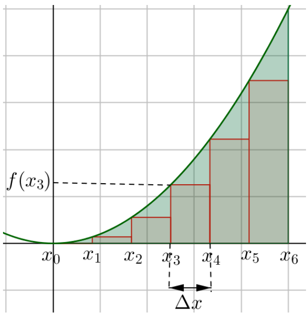
# Cours

## 1. Introduction

On note $f$ une fonction continue et positive sur $[a, b]$. On souhaite déterminer l'aire $A$ de la partie verte entre la courbe $C_f$, la droite des abscisses et les deux droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$.

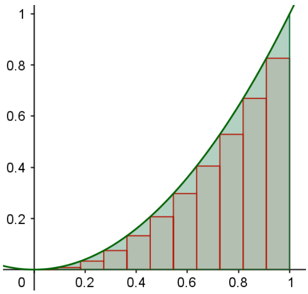



Pour cela on va découper le segment $[a, b)$ en six segments de même largeur $\Delta x$ et on trace les rectangles formés par ces largeurs et la courbe de la fonction $f$. On note $A_6$ la somme des aires de ces six rectangles.



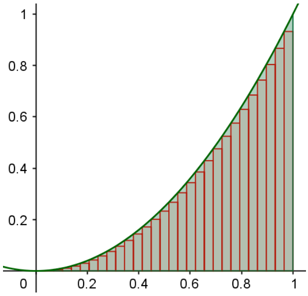

$$A_6 = \sum_{i=0}^{5} f(x_i)\Delta x$$

On continue la même méthode mais avec 11 segments de même largeur que l'on note encore $\Delta x$ mais la quantité $\Delta x$ est plus petite que la précédente.



$$A_{11} = \sum_{i=0}^{10} f(x_i)\Delta x$$

On continue avec une infinité de rectangles et donc un $\Delta x$ de plus en plus petit et qui tend vers 0. On voit que la somme des rectangles rouges se rapproche de plus en plus de l'aire verte cherchée.




$$A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x$$

On note cette Aire :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x$$

⚠ Une somme $\sum$ infinie devient une intégrale $\int$ et un écart $\Delta x$ qui devient petit se note $dx$

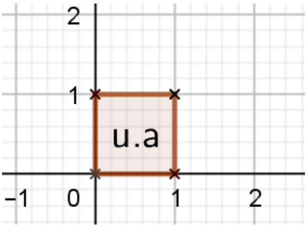
$$\int_a^b f(x)dx \text{ se lit l'intégrale de } a \text{ à } b \text{ de } f(x)dx$$

## 2. Intégrale d'une fonction continue et positive sur un segment $[a,b]$

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit $f$ une fonction continue et positive sur un segment $[a,b]$ et $C_f$ sa courbe représentative dans ce repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

## Définition 1 – Unité d'aire

L'unité d'aire dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est l'aire du rectangle formé par les unités du repère.

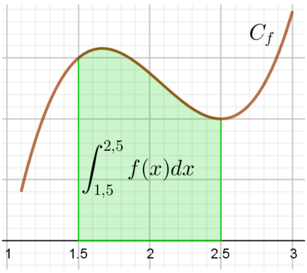



## Définition 2 – Intégrale et Aire

L'intégrale de $a$ à $b$ de $f$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine $D$ délimité par $C_f$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$.

On note cette intégrale $\int_a^b f(x)dx$.

L'aire de la partie verte ci-dessous est $A = \left(\int_{1,5}^{2,5} f(x)dx\right) \times \text{u.a}$




$\int_a^b f(x)dx$ se lit : intégrale de $a$ à $b$ de $f(x)dx$ ou somme de $a$ à $b$ de $f(x)dx$.

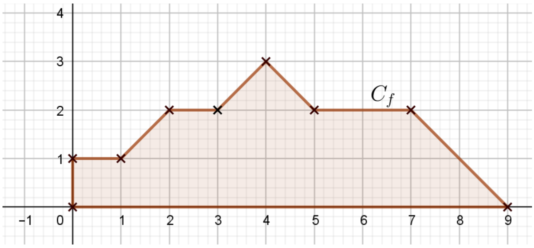
⚠ Dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$ la lettre $x$ est une variable muette donc elle peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\theta)d\theta$$

⚠ $a$ et $b$ sont les bornes de l'intégrale.

⚠ $\int_a^a f(x)dx = 0$.

**Exemple :**




$f$ est continue et positive sur $[0;9]$ et $\displaystyle\int_0^9 f(x)\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$.
L'aire marron est donc de $A = \ldots\ldots\ldots\ldots \times$ u.a.

**Propriété 1 – Théorème fondamental pour $f$ continue, positive sur $[a,b]$**

Si $f$ est une fonction continue et positive sur $[a,b]$ alors $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable et $F' = f$. $F$ est donc un primitive de $f$.

**Démonstration**

Démonstration admise en maths complémentaires.

**Propriété 2 – Primitives d'une fonction continue et positive sur $[a,b]$**

Si $f$ est continue et positive sur $[a,b]$ alors $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de $f$ sur $[a,b]$ qui s'annule en $a$. Toutes les primitives de $f$ sont les fonctions $F$ telles que $\phi(x) = F(x) + \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

**Démonstration**

Démonstration admise en maths complémentaires.

**Propriété 3 – Expression d'une intégrale avec une primitive**

Si $f$ est continue et positive sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$ où $F$ est une primitive de $f$ sur $[a,b]$.

**Démonstration**

Démonstration admise en maths complémentaires.

**Exemples :**

1) $\int_0^1 x^2+1dx =$ ........................................

2) $\int_2^3 \sqrt{x}dx =$ ........................................

3) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx =$ ........................................

## 3. Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

**Propriété 4 – Primitives de fonctions continues sur un intervalle I**

Si $f$ est continue de signe quelconque sur $[a, b]$ alors $f$ admet des primitives sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

**Démonstration**

Démonstration admise en maths complémentaires.

⚠ Il existe des fonctions discontinues sur $[a, b]$ et qui admettent des primitives sur $I$.

**Définition 3 – Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $I$**

$f$ est une fonction continue sur un intervalle I et $F$ est une primitive de $f$ sur I. $a$ et $b$ sont deux nombres quelconques de I. L'intégrale de $f$ entre $a$ et $b$ est :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

On écrira $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

**Exemples :**

1) $\int_{-1}^2 -3xdx =$ ........................................

2) $\int_1^{-1} t^2dt =$ ........................................

# 4. Propriétés

**Propriété 5 – Relation de Chasles**

$f$ est continue sur I et $a, b, c \in$ I.

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

**Démonstration**

Comme $f$ est continue sur I alors les intégrales existent et

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

**Propriété 6 – Linéarité de l'opérateur intégrale**

$f$ et $g$ sont continues sur I, $a, b \in$ I, $k \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b (k \times f)(x)dx = k \times \int_a^b f(x)dx$$

**Démonstration**

$f$ et $g$ sont continues sur I donc les intégrales existent et :

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\int_a^b (k \times f)(x)dx = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

### Propriété 7 – Inversion des bornes

$f$ est une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in I$.

▷ $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$

▷ $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

### Démonstration

$f$ est continue sur I donc les intégrales existent et :

▷ $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = [F(x)]_a^a = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

▷ La relation de Chasles permet d'écrire :

$\displaystyle\int_a^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

### Propriété 8 – Positivité de l'opérateur intégrale

$f$ est continue sur I, $a, b \in$ I.

$$\left\{\begin{array}{l} f \geq 0 \\ a \leq b \end{array}\right. \text{ sur } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

### Démonstration

$f$ est continue et positive sur I donc l'intégrale représente une aire et une aire est positive.

### Propriété 9 – Croissance de l'opérateur intégrale

$f$ et $g$ sont continues sur I, $a, b \in$ I.

$$\left\{\begin{array}{l} f \geq g \\ a \leq b \end{array}\right. \text{ sur } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

### Démonstration

$f$ et $g$ sont continues sur I donc $f - g$ aussi et par positivité de l'opérateur intégrale, alors comme pour tout $x$ dans I $f(x) - g(x) \ldots\ldots 0$ alors $\displaystyle\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\, dx \ldots\ldots 0$

Par linéarité de l'opérateur intégrale, on a donc

$$\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\, dx \ldots\ldots 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x) dx \ldots\ldots \int_a^b g(x) dx$$

**Propriété 10 – Encadrement d'une intégrale**

$f$ est une fonction continue sur $[a, b]$. Soit $m$ et $M$ deux réels tels que, pour tout $x \in [a, b]$,

$$m \leq f(x) \leq M$$

alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

**Démonstration**

$f$ est continue sur $[a, b]$ donc l'intégrale existe et comme pour tout $x \in [a, b]$, $m \ldots\ldots f(x) \ldots\ldots M$ alors d'après la croissance de l'opérateur intégrale on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b m dx \ldots\ldots \int_a^b f(x) dx \ldots\ldots \int_a^b M dx \Leftrightarrow [mx]_a^b \ldots\ldots \int_a^b f(x) dx \ldots\ldots [Mx]_a^b \\ \Leftrightarrow mb - ma \ldots\ldots \int_a^b f(x) dx \ldots\ldots Mb - Ma \\ \Leftrightarrow m(b-a) \ldots\ldots \int_a^b f(x) dx \ldots\ldots M(b-a)\end{aligned}$$

**Définition 4 – Valeur moyenne d'une fonction sur $[a, b]$**

$f$ est continue sur $[a, b]$. La valeur moyenne de la fonction $f$ sur $[a, b]$ est le réel

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Moyenne en statistique : $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \times n_i$

Moyenne d'une fonction : $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

Application pour le calcul de la vitesse moyenne entre deux temps $t_2$ et $t_1$ :

$$V_{\text{moyenne}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = \frac{D(t_2) - D(t_1)}{t_2 - t_1}$$

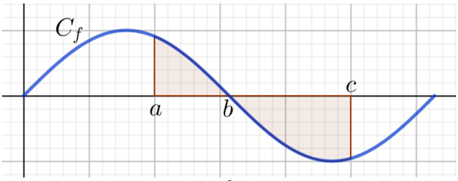
Application pour le calcul de l'accélération moyenne entre deux temps $t_2$ et $t_1$ :

$$A_{\text{moyenne}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$

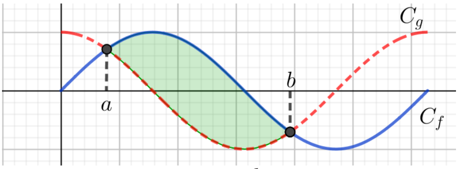
# 5. Applications

## 5.1. Calcul d'aires

1) **Aire entre deux courbes.**



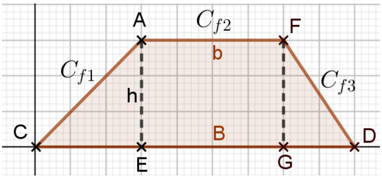

Aire coloriée : $A = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$




Aire coloriée : $A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$

2) **Aire d'une figure géométrique.**

Déterminons la formule de l'aire d'un trapèze :




$C(0;0)$, $A(a,h)$, $F(a+b;h)$ et $D(B;0)$
$f_1(x) = \dfrac{h}{a}x$, $f_2(x) = h$ et $f_3(x) = -\dfrac{h}{B-a-b}x + \dfrac{hB}{B-a-b}$

Les trois fonctions sont continues et positives respectivement sur $[0;a]$, $[a,a+b]$ et $[a+b,B]$ donc on peut calculer l'aire sous la courbe formée des trois segments.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^a f_1(x)dx + \int_a^{a+b} f_2(x)dx + \int_{a+b}^B f_3(x)dx \\
&= \int_0^a \frac{h}{a}xdx + \int_a^{a+b} hdx + \int_{a+b}^B \left(-\frac{h}{B-a-b}x + \frac{hB}{B-a-b}\right)dx \\
&= \left[\frac{h}{2a}x^2\right]_0^a + [hx]_a^{a+b} + \left[-\frac{h}{2(B-a-b)}x^2 + \frac{hB}{B-a-b}x\right]_{a+b}^B \\
&= \frac{ha^2}{2a} + hb - \frac{h}{2(B-a-b)}B^2 + \frac{hB}{B-a-b}B + \frac{h}{2(B-a-b)}(a+b)^2 - \frac{hB}{B-a-b}(a+b) \\
&= \frac{ha}{2} + hb + \frac{-hB^2 + 2hB^2 + h(a+b)^2 - 2hB(a+b)}{2(B-a-b)} \\
&= \frac{ha}{2} + hb + \frac{h(B^2 - 2aB - 2bB + 2ab + a^2 + b^2)}{2(B-a-b)} \\
&= \frac{ha}{2} + hb + \frac{h(B-a-b)^2}{2(B-a-b)} = \frac{ha}{2} + hb + \frac{h(B-a-b)}{2} \\
&= \frac{ha + 2hb + hB - ha - hb}{2} = \frac{ha + 2hb + hB - ha - hb}{2} \\
&= \frac{h(B+b)}{2}
\end{aligned}
$$

On retrouve la formule de l'aire d'un trapèze :

$$A = \frac{\text{Hauteur} \times (\text{Gde Base} + \text{petite base})}{2}$$

## 5.2. Médecine

Exercice résolu dans la partie exercice :

La concentration du principe actif moléculaire contenu dans un comprimé dans l'organisme varie en fonction du temps mais aussi en fonction de la capacité d'un individu à éliminer la substance ingérée, qui se nomme clairance.
La fonction ci-dessous définie sur $[0;12]$, représente la concentration en ($\mu$mol/L) du phénobarbital en fonction du temps (heures), dans l'organisme d'un individu retrouvé mort.

$$f : t \mapsto -\frac{2143}{360}t^2 + \frac{5781}{80}t$$

La clairance est donnée par la formule : Clairance $= \dfrac{\text{Dose absorbée}}{\text{Aire sous la courbe de } f}$

1) Sachant que l'autopsie a permis de déterminer que la clairance de la victime est de 16 mL/min, quelle a été la dose de substance ingérée par la victime ?
2) La masse molaire du phénobarbital est de 232 g/mol. Sachant qu'un comprimé de phénobarbital a une masse de 6 mg, déterminer le nombre de comprimés ingérés par la victime.