CHAPITRE 5

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

L'étude des équations différentielles (équations reliant une fonction avec sa ou ses dérivées successives) apparaît dans des domaines très variés des sciences :
en mécanique, en sciences physiques et chimie, en sciences de la Vie et de la Terre.
Nous allons étudier dans ce chapitre les équations linéaires du premier ordre.
Linéaire veut dire que les inconnues (ici y et y') n'apparaissent qu'au premier degré. Premier ordre veut dire que seule la dérivée première y' intervient dans cette équation. Elles pourront se ramener aux formes $y' = ay + b$ avec a et b des réels ou $y' = ay + f$ avec a un réel et f une fonction. Ces équations apparaîssent souvent lorsque la vitesse, la concentration ou un rapport de quantité est exprimé en fonction du temps ou d'une variable.
Les premiers mathématiciens qui ont travaillé sur les équations différentielles sont Newton et Leibniz mais la théorie s'est structurée avec Cauchy au XIXe siècle puis avec Klein et Poincaré au XXe siècle.

Les contenus du chapitre

▷ Equation différentielle $y' = f$. Notion de primitive d'une fonction continue sur un intervalle. Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.

▷ Primitives des fonctions de référence : $x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, exponentielle, sinus et cosinus.

▷ Equation différentielle $y' = ay$, où a est un nombre réel; allure des courbes. Equation différentielle $y' = ay + b$.

Les capacités attendues du chapitre

▷ Calculer une primitive en utilisant les primitives de référence et les fonctions de la forme $(v' \circ u) \times u'$.

▷ Pour une équation différentielle $y' = ay + b$, $(a \neq 0)$: déterminer une solution particulière constante; utiliser cette solution pour déterminer toutes les solutions.

▷ Pour une équation différentielle $y' = ay + f$: à partir de la donnée d'une solution particulière, déterminer toutes les solutions.

COURS

1. Equations différentielles linéaires du premier ordre

Définition 1 – Equation différentielle linéaire du premier ordre

Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation reliant y et y' et pouvant se ramener à une équation de la forme $y' = ay + b$, où a et b sont des réels constants ou des fonctions.
Dans ce chapitre nous allons étudier les deux cas ci-dessous :
- $y' = ay + b$ avec a et b deux réels et $a \neq 0$.
- $y' = ay + f$ avec a un réel et f une fonction.

L'objectif est de déterminer toutes les fonctions qui vérifient cette équation.

Exemples :
Equations différentielles linéaires du premier ordre :
▷ $y' = 2y$
▷ $y' = \frac{1}{4}y - 3$
▷ $y' = 4y + 2x$
▷ $y' = y$
▷ $y' - y = \cos x + \sin x$
Autres équations différentielles :
▷ $y'' = y$
▷ $3y'' - 5y' + y = 0$
▷ $y'' - y' = \cos x + \sin x$
▷ $y' = \frac{1}{t\ln(t)}y + 3t\ln(t)$

Méthode 1 – Variable des solutions d'une équation différentielle

Dans le cas des équations de la forme $y' = ay + b$ où a et b sont des réels, la variable des solutions se nomme x ou t ou tout autre lettre. Dans le cas $y' = ay + f$ la variable des solutions doit être nommée comme celle de la fonction f.

Exemples :
▷ Les solutions de $y' = 4y + 2x$ seront des fonctions qui dépendent de x.
▷ Les solutions de $y' = -5y + t^2 - 2t$ seront des fonctions qui dépendent de t.

Définition 2 – Equation générale et équation homogène

Si on note l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y' = ay + b$ alors on nomme :
▷ Equation générale (E_G) : $y' = ay + b$
▷ Equation homogène (E_H) : $y' = ay$

Exemples :

▷ Equation générale : $y' = 2y + 3$ Equation homogène :

▷ Equation générale : $3y' - 5y + 5 = 0$ Equation homogène :

▷ Equation générale : $y' - \dfrac{1}{2}y = 5t + 5$ Equation homogène :

Propriété 1 – Relation reliant deux solutions de (E_G)

Si f_p est une solution particulière de (E_G) alors toutes les solutions g de (E_G) vérifient que $g - f_p$ sont solutions de (E_H).

Démonstration

f_p est une solution connue de (E_g) alors pour tout x, $f_p'(x) = \ldots\ldots\ldots$
Soit g une autre solution de (E_g) alors pour tout x, $g'(x) = \ldots\ldots\ldots$
et donc par différence des deux égalités on obtient :

$$g'(x) - f_p'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = a(g - f_p)(x)$$

Par linéarisation de l'opérateur de dérivation on obtient :

$$(g - f_p)'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et en posant $f_H = g - f_p$ alors pour tout x, $f_H'(x) = \ldots\ldots\ldots$ donc f_H est solution de l'équation homogène (E_H).
Réciproquement :
On suppose que f_H est une solution de l'équation homogène et que g est une solution de l'équation générale.
Posons $f_p = g - f_H$ alors f_p est dérivable comme somme de fonctions dérivables et pour tout x :

$f_p'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

donc f_p est une solution de l'équation générale.

Méthode 2 – Méthode de résolution

D'après la propriété précédente, il suffit de connaître les solutions de l'équation homogène (E_H) et une solution particulière de l'équation générale (E_G) pour connaître toutes les solutions de l'équation générale (E_G).
Pour trouver toutes les solutions de l'équation générale (E_G), il faut additionner les solutions de l'équation homogène (E_H) avec la solution particulière de (E_G).
Il suffit donc de résoudre l'équation homogène (E_H) et de trouver une solution particulière de l'équation générale (E_G) pour obtenir toutes les solutions de l'équation générale (E_G).

Exemple :
On note (E_G) l'équation $y' = y - 1$
Admettons que les solutions de $(E_H) : y' = y$ sont les fonctions $f_H : x \mapsto C \times e^x$ avec $C \in \mathbb{R}$.
On voit facilement qu'une solution particulière de (E_G) est $f_p : x \mapsto \ldots\ldots\ldots\ldots$
D'après la propriété précédente, les solutions de l'équation générale (E_G) sont :

$$g : x \mapsto (f_H + \ldots\ldots\ldots)(x) = Ce^x + \cdots\cdots\cdots \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Propriété 2 – Dérivabilité des solutions

Si g est une solution de l'équation générale $y' = ay + b$ (où $a \in \mathbb{R}$) alors g est dérivable sur l'intersection des ensembles de définition de g et de b.

Démonstration

On note D_g et D_b les ensembles de définition de g et de b si b est une fonction.
La propriété vient du fait que pour tout $x \in D_g \cap D_b$, $g'(x) = ag(x) + b$.

2. Résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre

2.1. Primitive et équation différentielle $y' = f$

On nomme f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Définition 3 – Primitives

On nomme primitives de f sur I toutes les fonctions vérifiant l'équation différentielle $y' = f$.

Exemples :

▷ $F : x \mapsto$ .... est une primitive de $f : x \mapsto 2$ sur $\mathbb{R}$.

▷ $F : x \mapsto$ .... est une primitive de $f : x \mapsto 2$ sur $\mathbb{R}$.

▷ $F : x \mapsto$ .... est une primitive de $f : x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$.

▷ $F : x \mapsto$ .... est une primitive de $f : x \mapsto x^4$ sur $\mathbb{R}$.

▷ $F : x \mapsto$ .... est une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

▷ $F : x \mapsto$ .... est une primitive de $f : x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$.

Propriété 3 – Existence (propriété admise dans ce chapitre)

Si f est continue sur I alors f admet des primitives sur I.

Démonstration

Voir le chapitre sur les intégrales.

Méthode 3 – Primitives des fonctions usuelles

Fonctions f	Intervalle de définition	Une primitive F
$f : x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$	$F : x \mapsto \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$
$f : x \mapsto k\ ,\ k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$F : x \mapsto kx$
$f : x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$F : x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$f : x \mapsto \dfrac{1}{x^n}, \in \mathbb{N},\ n > 1$	$\mathbb{R}^*$	$F : x \mapsto -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$
$f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$F : x \mapsto \ln\lvert x\rvert$
$f : x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$	$F : x \mapsto e^x$
$f : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$	$F : x \mapsto \sqrt{x}$
$f : x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$F : x \mapsto \sin x$
$f : x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$F : x \mapsto -\cos x$

Propriété 4 – Primitives de fonctions composées.

On note u et v deux fonctions dérivables sur I avec $v(u(x))$ définie sur I.
Une primitive de $f : x \mapsto u'(x) \times v'(u(x))$ est $F : x \mapsto v(u(x))$.

Démonstration

On note $F : x \mapsto v(u(x))$ définie sur I.
Pour tout $x \in I$ et pour tout $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ et $x + h \in I$,

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{v(u(x+h))-v(u(x))}{h}=\frac{v(u(x+h))-v(u(x))}{u(x+h)-u(x)}\times\frac{u(x+h)-u(x)}{h}$$

Or $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{v(u(x+h))-v(u(x))}{u(x+h)-u(x)}=v'(u(x))$ et $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}=u'(x)$ donc

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=u'(x)\times v'(u(x))\in\mathbb{R}$ ainsi F est dérivable et $F'(x)=f(x)$

on peut donc conclure que F est une primitive de f sur I.

Méthode 4 – Recherche de primitives de fonctions non usuelles

A l'aide de la propriété ci-dessus on va pouvoir utiliser les formules ci-après.

Fonctions	Une primitive
$u'(x)+v'(x)$	$u(x)+v(x)$
$u'(x)-v'(x)$	$u(x)-v(x)$
$k\times u'(x)$	$k\times u(x)$
$u'(x)\times u^n(x),\ n\in\mathbb{N}^*$	$\dfrac{u^{n+1}(x)}{n+1}$
$\dfrac{u'(x)}{u^n(x)},\ n\in\mathbb{N}\ n\geq2,\ u^n(x)\neq0$	$-\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}(x)}$

Fonctions	Une primitive
$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$, $u(x) \geq 0$	$\sqrt{u(x)}$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, $u(x) \neq 0$	$\ln(\lvert u(x)\rvert)$
$u'(x)\cos(u(x))$	$\sin(u(x))$
$u'(x)\sin(u(x))$	$-\cos(u(x))$

Propriété 5 – Les primitives

Si f admet une primitive F sur I alors toutes les fonctions $G : x \mapsto F(x) + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ sont des primitives de f sur I.

Démonstration

$\Rightarrow$ Montrons que $G : x \mapsto F(x) + \lambda$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I.
Pour tout $x \in I$,
G est dérivable sur I et $G'(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
Donc G est bien une primitive de f sur I.

$\Leftarrow$ Montrons que si F et G sont deux primitives de f sur I alors elles diffèrent d'une constante réelle.
Soit F et G deux primitives de f sur I.
Pour tout $x \in I$,
$G'(x) = \dots\dots\dots\dots$ et $F'(x) = \dots\dots\dots\dots$ donc par différence $G'(x) - F'(x) = \dots\dots\dots$
puis par linéarité de l'opérateur de dérivation, $(G-F)'(x) = \dots\dots\dots$
donc $G - F$ est une primitive de 0 sur I
ainsi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour $x \in I$,

$$(G-F)(x) = \dots\dots\dots \Leftrightarrow G(x) - F(x) = \dots\dots\dots \Leftrightarrow G(x) = F(x) + \dots\dots\dots$$

Exemples :

▷ Les primitives de $f : x \mapsto x$ sont les fonctions $F : x \mapsto \dots\dots\dots\dots\dots$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

▷ Les primitives de $f : x \mapsto e^x + 3$ sont les fonctions $F : x \mapsto \dots\dots\dots\dots\dots$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Propriété 6 – Unicité

Si f admet des primitives sur I alors il en existe une seule vérifiant $F(a) = b$

Démonstration

Si F est une primitive de f sur I alors toutes les primitives sont de la forme G : $x \mapsto F(x) + \lambda$.
On a donc $G(a) = b \Leftrightarrow$ ....
donc λ est unique et ainsi G est unique et $G : x \mapsto$ ....

2.2. Equation de la forme $y' = ay$

Propriété 7 – Solutions de $y' = ay$

Les solutions de l'équation différentielle homogène (E_H) : $y' = ay$ où a est une constante réelle, sont les fonctions :

$$f_H : x \mapsto Ce^{ax} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Démonstration

▷ Montrons que f_H est solution de (E_H).
f_H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_H'(x) =$ ....

De plus $af_H(x) =$ ....

donc f_H' est solution de l'équation (E_H).

▷ Supposons que f soit une solution de (E_H).
On pose $z : x \mapsto e^{-ax} f(x)$ alors z est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$z'(x) =$ ....
Or f est solution de (E_H) ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) - af(x) =$ ....
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $z'(x) = 0$ d'où z est une fonction constante dans $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $z(x) =$ ....

Conclusion : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $C = e^{-ax} f(x) \Leftrightarrow f(x) =$ ....

Exemples :
▷ Les solutions de $y' = y$ sont les fonctions $f_H : x \mapsto$ ....

▷ Les solutions de $y' = 2y$ sont les fonctions $f_H : x \mapsto$ ....

▷ Les solutions de $y' = -3y$ sont les fonctions $f_H : x \mapsto$ ....

$\triangleright$ Les solutions de $2y' - 3y = 0$ sont les fonctions $f_H : x \mapsto$ ....

2.3. Equation de la forme $y' = ay + b$

D'après la propriété précédente, les solutions de l'équation homogène $(H) : y' = ay$ sont les fonctions :

$$f_H : x \mapsto Ce^{ax}, C \in \mathbb{R}$$

Propriété 8 – Solutions de l'équation $y' = ay + b$

Les solutions de l'équation générale $(G) : y' = ay + b$ sont les fonctions :

$$g : x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$$

Démonstration

On va chercher une solution particulière de l'équation générale $(G) : y' = ay + b$

Première méthode :
Comme b est une constante on peut chercher une solution particulière constante.
On note $f_p : x \mapsto k$, $k \in \mathbb{R}$.

f_p est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f_p'(x) =$ ....

On a donc $0 = af_p(x) + b \Leftrightarrow f_p(x) =$ ....
D'après les propriétés précédentes, les solutions générales de (G) sont de la forme $g : x \mapsto f_h(x) + f_p(x)$ d'où

$$g : x \mapsto \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Deuxième méthode : (Méthode de la variation de la constante)
On prend l'expression des solutions de l'équation homogène mais en faisant varier la constante.

$$f_p : x \mapsto C(x)e^{ax}, C \in \mathbb{R}$$

f_p est dérivable et $f_p'(x) =$ ....
Or $f_p'(x) = af_p(x) + b$

$\Leftrightarrow$ ....

$\Leftrightarrow$ ....

On a donc $C(x) =$ ....

Ainsi $f_p(x) =$ ....

D'après les propriétés précédentes, les solutions générales de (G) sont de la forme $g : x \mapsto f_h(x) + f_p(x)$ d'où

$$g : x \mapsto \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemples :
$y' = 2y - 3$ alors $g : x \mapsto$ …………………………..

$y' = -3y + 5$ alors $g : x \mapsto$ …………………………..

$y' = \frac{1}{2}y + 4$ alors $g : x \mapsto$ …………………………..

2.4. Equation de la forme $y' = ay + f$

On note (G) l'équation générale : $y' = ay + f$
On note (H) l'équation homogène $y' = ay$.
D'après une propriété précédente, les solutions de (H) sont les fonctions $f_H : x \mapsto Ce^{ax}$, $C \in \mathbb{R}$.
Si on connaît une solution particulière f_p de (G) alors toutes les solutions de (G) sont de la forme

$$g : x \mapsto f_H(x) + f_p(x)$$

Méthode 5 – Recherche d'une solution particulière pour $y' = ay + f$

Pour trouver f_p on utilise les étapes suivantes :
Etape 1 :
On cherche une solution évidente (qui saute aux yeux).
Exemple :
Soit l'équation $y' = y - 1$
Il est évident que $f_p : x \mapsto$ …………… est une solution de cette équation.

Exemple :
Soit l'équation $y' = y - x$
Il est évident que $f_p : x \mapsto$ …………… est une solution de cette équation.

Etape 2 :
Si on ne trouve pas une solution évidente on cherche une solution de la même forme que f. Par exemple, si f est affine on cherche une solution particulière affine.

Exemples :
▷ Soit l'équation (E) : $y' = 2y + 3x - 5$
On cherche $f_p : x \mapsto ax + b$ solution de l'équation.

f_p est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_p'(x) = \ldots\ldots\ldots$

On a donc en injectant dans (E) :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Par identification, on obtient que $2a = \ldots\ldots$ et $2b - a = \ldots\ldots\ldots$ donc $a = \ldots\ldots\ldots$ et $b = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

donc $f_p : x \mapsto \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$..

▷ Soit l'équation $y' = 3y + e^x$
On cherche $f_p : x \mapsto ae^x$ solution de l'équation.
f_p est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_p'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

On a donc $ae^x = 3ae^x + e^x \Leftrightarrow (2a+1)e^x = 0 \Leftrightarrow a = \ldots\ldots\ldots\ldots$

donc $f_p : x \mapsto \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Etape 3 :
Si on ne trouve pas de solution particulière facilement, on utilise la méthode de variation de la constante comme dans le paragraphe précédent.

⚠ Dans les exercices on vous demandera surtout de vérifier qu'une fonction est solution particulière de (G).