Chapitre 4

Limites et continuité des fonctions

Les travaux de Newton et Leibniz révèlent deux visions et deux pratiques différentes du calcul infinitésimal. La justification de telles méthodes nécessitait une mise au point de la notion de limite. Cauchy (1821-1823) définit précisément la notion de limite et en fait le point de départ de l'analyse. A travers le théorème des valeurs intermédiaires, l'étude de la continuité des fonctions permet de préciser les arguments assurant qu'une équation du type $f(x) = k$ admet des solutions.

Les contenus du chapitre

▷ Limite finie ou infinie d'une fonction en $+\infty$, en $-\infty$, en un point. Asymptote parallèle à un axe de coordonnées.

▷ Limites faisant intervenir les fonctions élémentaires étudiées en classe de première. Puissances entières, racine carrée et fonction exponentielle.

▷ Limite, opérations sur les limites et comparaison.

▷ Fonction continue en un point (définition par la limite), sur un intervalle. Toute fonction dérivable est continue.

▷ Image d'une suite convergente par une fonction continue.

▷ Théorème des valeurs intermédiaires. Cas des fonctions continues et strictement monotones.

Les capacités attendues du chapitre

▷ Déterminer dans des cas simples la limite d'une suite ou d'une fonction en un point, en $\pm\infty$, en utilisant les limites usuelles, les croissances comparées, les opérations sur les limites, des majorations, minorations ou encadrements, la factorisation du terme prépondérant dans une somme.

▷ Faire le lien entre l'existence d'une asymptote parallèle à un axe et celle de la limite correspondante.

▷ Etudier les solutions d'une équation du type $f(x) = k$: existence, unicité, encadrement.

▷ Pour une fonction continue f d'un intervalle dans lui-même, étudier une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Cours

1. Limite d'une fonction à l'infini

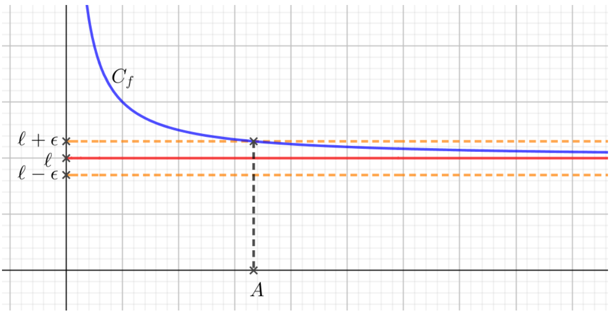
1.1. Limite finie

Définition 1 – Limite finie en $+\infty$

f est définie sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$ et $\ell \in \mathbb{R}$.
On dit que f admet une limite ℓ quand $x \to +\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les $f(x)$ dès que x est assez grand. On notera :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

Interprétation graphique :

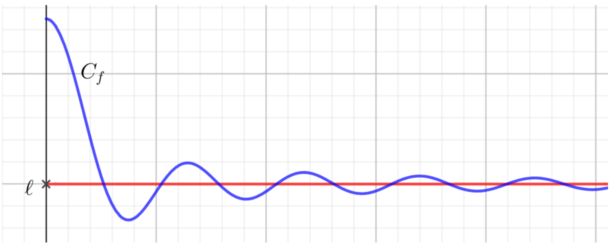


Traduction mathématique :
Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $x > A$, $f(x) \in]\ell-\epsilon;\ell+\epsilon[$

Définition 2 – Asymptote horizontale en $+\infty$

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ alors la droite horizontale d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale à la courbe C_f en $+\infty$.

Interprétation graphique :
La courbe de la fonction f se rapproche de plus en plus de la droite d'équation $y = \ell$ en $+\infty$.

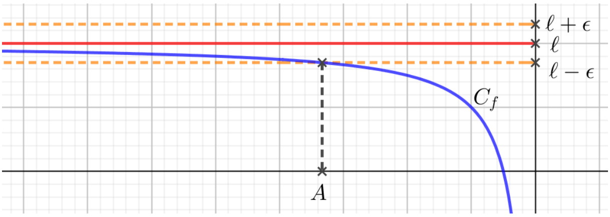


Définition 3 – Limite finie en $-\infty$

f est définie sur un intervalle de la forme $]-\infty; a[$ et $\ell \in \mathbb{R}$.
On dit que f admet une limite ℓ quand $x \to -\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les $f(x)$ dès que x est assez grand dans les négatifs.
On notera :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$$

Interprétation graphique :

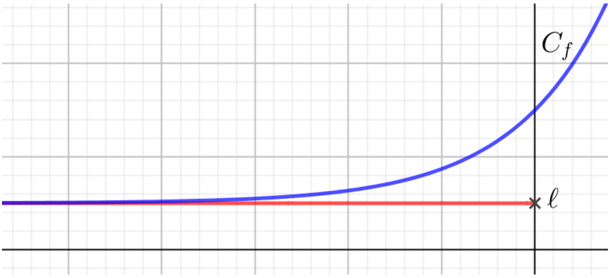


Traduction mathématique :
Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $A < 0$ tel que pour tout$x < A$, $f(x) \in]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$

Définition 4 – Asymptote horizontale en $-\infty$

Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ alors la droite horizontale d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale à la courbe C_f en $-\infty$.

Interprétation graphique :
La courbe de la fonction f se rapproche de plus en plus de la droite d'équation $y = \ell$ en $-\infty$.



Propriété 1 – Limites des fonctions usuelles

On note $k \in \mathbb{N}^*$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = \ldots\ldots$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = \ldots\ldots$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^k} = \ldots\ldots$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = \ldots\ldots$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = \ldots\ldots$ $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \ldots\ldots$

Si k est impair, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^k} = \ldots\ldots$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \ldots\ldots$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = \ldots\ldots$

Si k est pair, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^k} = \ldots\ldots$ Si $k > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^{kx}} \ldots\ldots$

Si $k < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{kx} = \ldots\ldots$

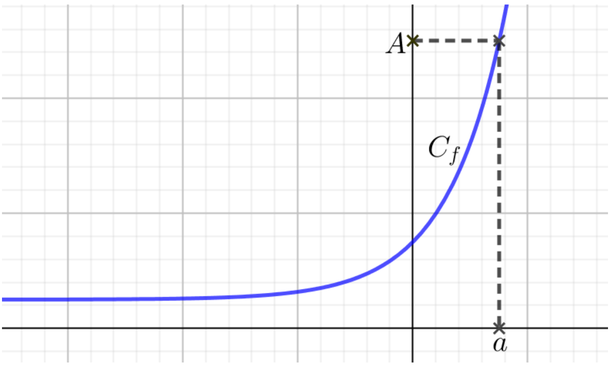
1.2. Limite infinie

Définition 5 – Limite donnant $+\infty$ en $+\infty$

f est définie sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$.
On dit que f a pour limite $+\infty$ quand $x \to +\infty$ lorsque tout intervalle du type $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand. On notera :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Remarque : si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors f n'est pas majorée.
Interprétation graphique :



Traduction mathématique :
Pour tout $A > 0$, il existe $a > 0$ tel que pour tout $x > a$, $f(x) \in]A; +\infty[$

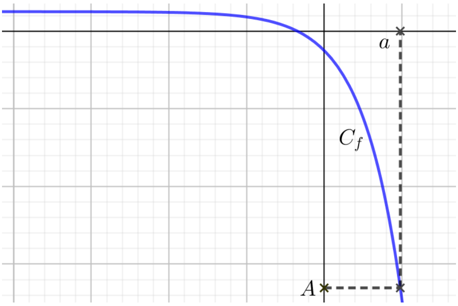
Définition 6 – Limite donnant $-\infty$ en $+\infty$

f est définie sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$.
On dit que f a pour limite $-\infty$ quand $x \to +\infty$ lorsque tout intervalle du type $]-\infty;A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.
On notera :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

Remarque : si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ alors f n'est pas minorée.

Interprétation graphique :



Traduction mathématique :
Pour tout $A<0$, il existe $a>0$ tel que pour tout $x>a$, $f(x)\in]-\infty;A[$

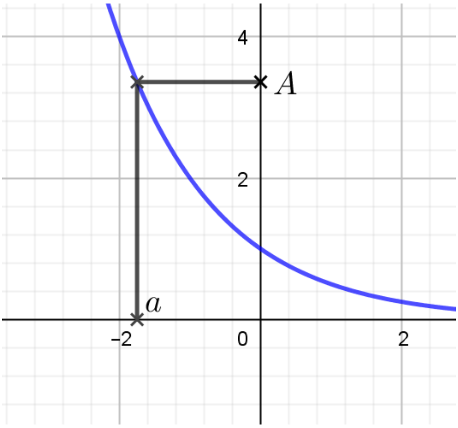
Définition 7 – Limite donnant $+\infty$ en $-\infty$

f est définie sur un intervalle de la forme $]-\infty;a[$.
On dit que f a pour limite $+\infty$ quand $x \to -\infty$ lorsque tout intervalle du type $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand dans les négatifs.
On notera :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

Remarque : si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ alors f n'est pas majorée.

Interprétation graphique :



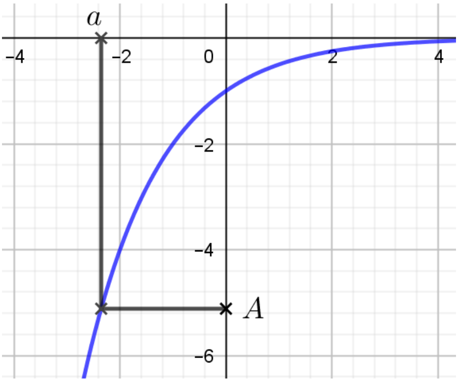
Traduction mathématique :
Pour tout $A > 0$, il existe $a < 0$ tel que pour tout $x < a$, $f(x) \in]A;+\infty[$

Définition 8 – Limite donnant $-\infty$ en $-\infty$

f est définie sur un intervalle de la forme $]-\infty;a[$.
On dit que f a pour limite $-\infty$ quand $x \to -\infty$ lorsque tout intervalle du type $]-\infty;A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand dans les négatifs.
On notera :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Remarque : si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ alors f n'est pas minorée.
Interprétation graphique :



Traduction mathématique :
Pour tout $A < 0$, il existe $a < 0$ tel que pour tout $x < a$, $f(x) \in]-\infty;A[$

Propriété 2 – Limites des fonctions usuelles

On note $k \in \mathbb{N}^*$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = \ldots\ldots$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = \ldots\ldots$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = \ldots\ldots$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = \ldots\ldots$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x = \ldots\ldots$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = \ldots\ldots$

Si k est pair, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = \ldots\ldots$ Si k est impair, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = \ldots\ldots$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = \ldots\ldots$ $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = \ldots\ldots$

Si $k > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{kx} = \ldots\ldots$ Si $k < 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{kx} = \ldots\ldots$

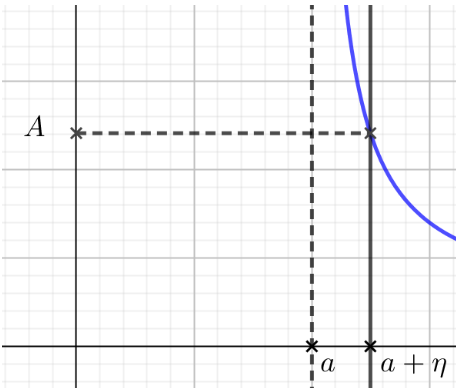
2. Limite d'une fonction en un réel a

Définition 9 – Limite donnant $+\infty$ à droite d'un réel a

Soit f une fonction définie sur $]a;b]$.
On dit que f admet pour limite à droite en a, $+\infty$ si tout intervalle du type $]A;+\infty[$ contient tout les $f(x)$ dès que x est assez proche de a, x restant à droite de a. On notera :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = +\infty$$

Interprétation graphique :



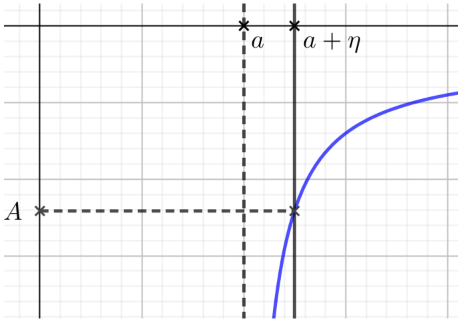
Traduction mathématique :
Pour tout $A > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]a;a+\eta[$, $f(x) \in]A;+\infty[$

Définition 10 – Limite donnant $-\infty$ à droite d'un réel a

Soit f une fonction définie sur $]a;b]$.
On dit que f admet pour limite à droite en a, $-\infty$ si tout intervalle du type $]-\infty;A[$ contient tout les $f(x)$ dès que x est assez proche de a, x restant à droite de a. On notera :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = -\infty$$

Interprétation graphique :



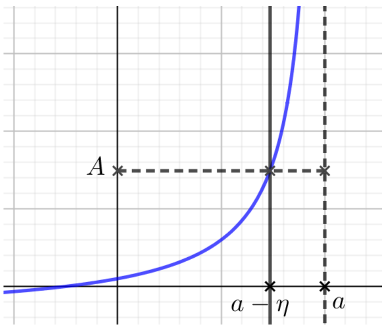
Traduction mathématique :
Pour tout $A<0$, il existe $\eta>0$ tel que pour tout $x \in]a;a+\eta[$, $f(x) \in]-\infty;A[$

Définition 11 – Limite donnant $+\infty$ à gauche d'un réel a

Soit f une fonction définie sur $[b,a[$.
On dit que f admet pour limite à gauche en a, $+\infty$ si tout intervalle du type $]A;+\infty[$ contient tout les $f(x)$ dès que x est assez proche de a, x restant à gauche de a. On notera :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = +\infty$$

Interprétation graphique :



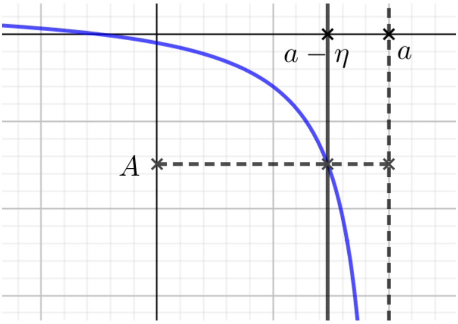
Traduction mathématique :
Pour tout $A>0$, il existe $\eta>0$ tel que pour tout $x \in]a-\eta;a[$, $f(x) \in]A;+\infty[$

Définition 12 – Limite donnant $-\infty$ à gauche d'un réel a

Soit f une fonction définie sur $[b, a[$.
On dit que f admet pour limite à gauche en a, $-\infty$ si tout intervalle du type $]-\infty; A[$ contient tout les $f(x)$ dès que x est assez proche de a, x restant à gauche de a. On notera :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = -\infty$$

Interprétation graphique :



Traduction mathématique :
Pour tout $A < 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\eta; a[$, $f(x) \in]-\infty; A[$

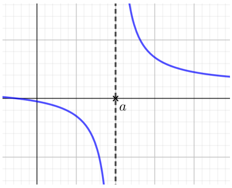
Définition 13 – limite en a

Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x)$ on dit que f admet une limite en a.

Définition 14 – Asymptote verticale

Si f a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ en a (ou à droite ou à gauche) alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe C_f.

Interprétation graphique : la courbe C_f se rapproche de la droite d'équation $x = a$ à gauche et/ou à droite de a.



Propriété 3 – Limites des fonctions usuelles

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = \ldots\ldots \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = \ldots\ldots \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x^2} = \ldots\ldots$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x^2} = \ldots\ldots \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = \ldots\ldots$$

3. Opération sur les limites

On a les mêmes résultats que pour les suites.
F.I veut dire que la limite est indéterminée et qu'il faut trouver une autre méthode pour la déterminer lorsque cela est possible.

3.1. Somme de fonctions

Propriété 4 – Limite de somme de fonctions

ℓ et ℓ' sont des réels.

$\lim f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\boldsymbol{\lim f(x)+g(x)}$	$\boldsymbol{\ell+\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	***F.I***

Exemples :

▷ Déterminons la $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + x$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \ldots\ldots \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = \ldots\ldots \end{array}\right\} \text{donc par somme } \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + x = \ldots\ldots$$

▷ Déterminons la $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 + x$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 = \ldots\ldots \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = \ldots\ldots \end{array}\right\} \text{donc par somme } \lim_{x\to+\infty} x^2 + x = \ldots\ldots$$

3.2. Produit de fonctions

Propriété 5 – Limite de produit de fonctions

ℓ et ℓ' sont des réels.

$\lim f(x)$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\boldsymbol{\lim f(x) \times g(x)}$	$\boldsymbol{\ell \times \ell'}$	$+\infty\ (\ell > 0)$ $-\infty\ (\ell < 0)$	$-\infty\ (\ell > 0)$ $+\infty\ (\ell < 0)$	$\pm\infty$	***F.I***

Exemples :

▷ Déterminons la $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1-\sqrt{x}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = \ldots\ldots \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -\sqrt{x} = \ldots\ldots \end{array}\right\} \text{donc par somme } \lim\limits_{x\to+\infty} 1-\sqrt{x} = -\infty \end{array}\right\} \text{donc par produit}$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3\left(1-\sqrt{x}\right) = \ldots\ldots$$

▷ Déterminons la $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(4-\dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{2}{x^2}-3\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} 4 = \ldots\ldots \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = \ldots\ldots \end{array}\right\} \text{donc par somme } \lim\limits_{x\to+\infty} \left(4-\dfrac{1}{x}\right) = \ldots\ldots \\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x^2} = \ldots\ldots \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -3 = \ldots\ldots \end{array}\right\} \text{donc par somme } \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2}{x^2}-3\right) = \ldots\ldots \end{array}\right\} \text{donc par produit}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(4-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{2}{x^2}-3\right) = \ldots\ldots$$

▷ Déterminons la $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+x$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = \ldots \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x = \ldots \end{array}\right\}$ donc par somme on obtient une forme indéterminée. Pour la déterminer on va factoriser par le terme de plus haut degré (terme dominant) x^2

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $x^2+x = x^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = \ldots\ldots \\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} 1 = \ldots\ldots \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = \ldots\ldots \end{array}\right\} \text{donc par somme } \lim\limits_{x\to-\infty} 1+\dfrac{1}{x} = \ldots\ldots \end{array}\right\} \text{donc par produit}$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^2+x = \ldots\ldots$$

Méthode 1 – Déterminer une forme indéterminée pour une somme

On s'arrange pour transformer la somme en produit, en factorisant par le terme dominant.

Exemples :

▷ Si $x \neq 0$, $x^2+3x = x^2\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$

▷ Si $x \neq 0$, $x^3-3x^2+5x+1 = x^3\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)$

▷ Si $x > 0$, $3x-\sqrt{x} = x\left(3-\dfrac{\sqrt{x}}{x}\right) = x\left(3-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

Cas particulier : avec des racines carrées on peut utiliser le produit par l'expression conjuguée.

Exemple :

▷ $\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \dfrac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \dfrac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

3.3. Quotient de fonctions

Propriété 6 – Limite de quotient de fonctions

ℓ et ℓ' sont des réels.

$\lim f(x)$	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim g(x)$	$\ell'(\ell' \neq 0)$	$+\infty$	0	$\ell'(\ell' \neq 0)$	0	$\pm\infty$
$\boldsymbol{\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}}$	$\boldsymbol{\dfrac{\ell}{\ell'}}$	$\mathbf{0^+}$ **ou** $\mathbf{0^-}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	***F.I***	***F.I***

Exemples :

▷ Déterminons la $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{2x+3}{x^2-1}$

Etudions, pour commencer, le signe de x^2-1 :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x^2-1 = \ldots\ldots \\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x^2-1 = \ldots\ldots \end{cases} \quad \text{On a donc}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1} 2x = \ldots\ldots \\ \lim\limits_{x\to 1} 3 = \ldots\ldots \end{array}\right\} \text{donc par somme } \lim\limits_{x\to 1} 2x+3 = \ldots\ldots \\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x^2-1 = \ldots\ldots \\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x^2-1 = \ldots\ldots \end{array}\right\} \end{array}\right\} \text{donc par quotient on}$$

obtient
deux limites possibles

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \dfrac{2x+3}{x^2-1} = \dots \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{2x+3}{x^2-1} = \dots \end{cases}$$

Méthode 2 – Déterminer une forme indéterminée pour un quotient

Lorsqu'un quotient est une forme indéterminée pour une limite, on utilise les méthodes suivants :
▷ Si la limite est en $\ell \in \mathbb{R}$, et que l'on obtient 0 comme limite au numérateur et au dénominateur, alors on factorise puis simplifie par $(x-\ell)$ le numérateur et le dénominateur.
Exemple :
▷ Déterminons la $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$
On remarque que 1 est une racine des deux polynômes x^2+2x-3 et x^2+x-2 donc

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x+3}{x+2}$$

On en déduit que

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 1} x+3 = 4 \\ \lim_{x\to 1} x+2 = 3 \end{aligned}\right\} \text{donc par quotient } \lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2} = \frac{4}{3}$$

▷ Si la limite est en $\pm\infty$, et que l'on obtient $\pm\infty$ comme limite au numérateur et au dénominateur, alors on factorise et simplifie par le terme dominant le numérateur et le dénominteur.
Exemple :
▷ Déterminons la $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2x}{x^3-2}$

Pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{x^2-2x}{x^2-2} = \dfrac{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x^3\left(1-\frac{2}{x^3}\right)} = \dfrac{\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x^3}\right)}$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{2}{x} = 1 \\ &\left.\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{2}{x^3} = 1 \\ \lim_{x\to+\infty} x = +\infty \end{aligned}\right\} \text{donc par produit } \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{2}{x^3}\right) = +\infty \end{aligned}\right\}$$

donc par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2x}{x^2-2} = 0$

4. Limites et comparaison

Propriété 7 – Théorème de comparaison

f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I au voisinage de a (intervalle ouvert contenant a), a étant un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

▷ Si pour tout x dans I, $\begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty \end{cases}$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

▷ Si pour tout x dans I, $\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty \end{cases}$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

Propriété 8 – Théorème d'encadrement

f, g et h sont trois fonctions définies sur un intervalle I au voisinage de a (intervalle ouvert contenant a), a étant un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. On note $\ell \in \mathbb{R}$

▷ Si pour tout x dans I, $\begin{cases} f(x) \geq g(x) \geq h(x) \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell \end{cases}$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$

Remarque : ce théorème se nomme dans certains manuels "**théorème des gendarmes**" mais évitons ce qualificatif car les gendarmes n'ont pas seulement un rôle d'encadrement dans la vie hors des mathématiques.

5. Continuité

5.1. Définition

Définition 15 – Continuité en a

f est définie sur un intervalle I et $a \in$ I.
f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

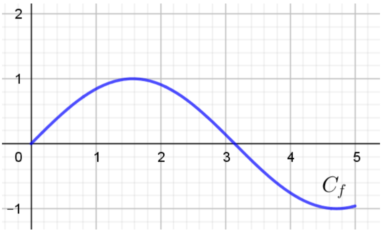
Définition 16 – Continuité sur un intervalle I

f est continue sur I si elle est continue en tout a de I.

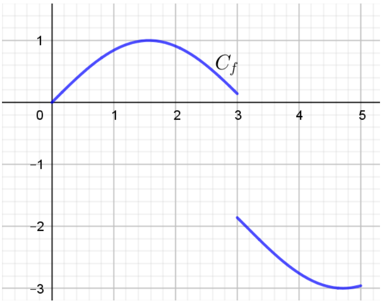
Remarque : graphiquement la continuité sur I est traduite par le fait que l'on peut passer un crayon sur la courbe de f sans lever le stylo.

Exemples :

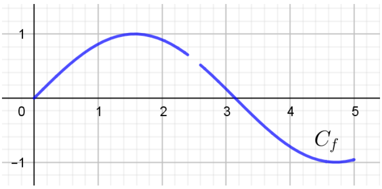
▷ La fonction ci-dessous est continue sur $[0;5]$



▷ La fonction ci-dessous n'est pas continue sur $[0;5]$



▷ La fonction ci-dessous n'est pas continue sur $[0;5]$



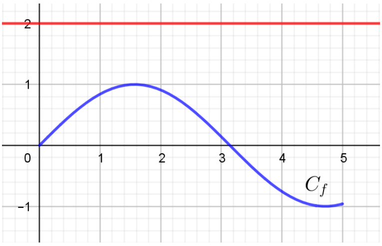
Propriété 9 – Lien entre dérivabilité et continuité (admise)

Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

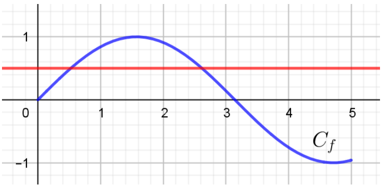
⚠ La réciproque est fausse. Par exemple, les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto |x|$ sont continues en 0 mais ne sont pas dérivables en 0.

5.2. Théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I.)

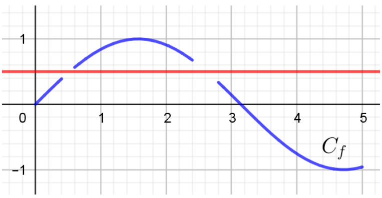
f est une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$.
On note k un nombre réel.
▷ L'équation $f(x) = k$ a-t-elle forcément au moins une solution ?
Non car k n'est pas forcément une image d'un nombre de l'ensemble de définition.
Exemple :
L'équation $f(x) = 2$ n'a pas de solution sur $[0;5]$ pour la fonction représentée ci-dessous.



▷ Quelle(s) condition(s) faut-il sur f pour qu'il y ait au moins une solution ?
Il faut que k soit une ou plusieurs des images d'antécédent(s) de l'ensemble de définition ($k \in f([a;b])$) et que la fonction f soit continue.
L'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ a deux solutions sur $[0;5]$ pour la fonction représentée ci-dessous.

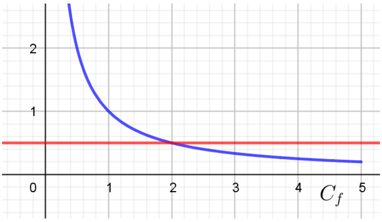


L'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ n'a pas de solution sur $[0;5]$ pour la fonction représentée ci-dessous.



▷ Quelle(s) condition(s) faut-il sur f pour qu'il y ait une seule solution ? Il faut trois conditions : f doit être continue, strictement monotone et k doit être une des images possibles.

L'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ a une seule solution sur $[0;5]$ pour la fonction représentée ci-dessous.



Propriété 10 – Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. Pour tout $k \in f([a;b])$, il existe au moins un réel α de $[a;b]$ tel que $f(\alpha) = k$.

Propriété 11 – Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a;b]$. Pour tout $k \in f[a;b])$, il existe un unique réel α de $[a;b]$ tel que $f(\alpha) = k$.

Méthode 3 – Utilisation du corollaire du T.V.I

Exemple :

On note $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$

▷ f est une fonction dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$.

▷ $f'(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc f est strictement croissante donc strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

▷ $f(0) = -1$ et $f(1) = \frac{4}{3}$ donc $0 \in f([0;1])$

d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaire, $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0;1]$.

Autre possibilité :

▷ f est une fonction dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$.

▷ $f'(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc f est strictement croissante donc strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

▷ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ donc $0 \in f(\mathbb{R})$

d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.