Chapitre 3

Compléments sur la dérivation

En économie, la convexité est un indicateur de risque de taux directement lié au concept mathématique de fonction convexe.
Dans la langue courante le mot « convexité » a un sens directement relié au concept mathématique d'ensemble convexe, la convexité d'un objet désignant la partie de celui-ci qui a une forme bombée.
On retrouve ce même sens en optique géométrique, notamment pour qualifier des miroirs ou des lentilles.

Les contenus du chapitre
▷ Composée de deux fonctions, notations $v \circ u$. Relation $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$ pour la dérivée de la composée de deux fonctions dérivables.
▷ Dérivée seconde d'une fonction.
▷ Fonction convexe sur un intervalle : définition par la position relative de la courbe représentative et des sécantes. Pour une fonction deux fois dérivable, équivalence admise avec la position par rapport aux tangentes, la croissance de f', la positivité de f''.
▷ Point d'inflexion.

Les capacités attendues du chapitre
▷ Calculer la dérivée d'une fonction donnée par une formule simple mettant en jeu opérations algébriques et composition.
▷ Calculer la fonction dérivée, déterminer les limites et étudier les variations d'une fonction construite simplement à partir des fonctions de référence.
▷ Démontrer des inégalités en utilisant la convexité d'une fonction.
▷ Esquisser l'allure de la courbe représentative d'une fonction f à partir de la donnée de tableaux de variations de f, de f' et de f''.
▷ Lire sur une représentation graphique de f, de f' ou de f'' les intervalles où f est convexe, concave, et les points d'inflexion. Dans le cadre de la résolution de problème, étudier et utiliser la convexité d'une fonction.

Cours

1. Rappels de première

f est une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.

▷ f est dérivable en a si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe, est unique et est réelle. Dans ce cas on note $f'(a)$ le nombre dérivé de f en a et

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

▷ Lorsque f est dérivable sur un intervalle I, on note f' la fonction qui à x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$ et donc

$$f : x \longmapsto f'(x)$$

▷ Géométriquement $f'(a)$ représente le coefficient directeur de la tangente à C_f au point de coordonnées $(a; f(a))$. L'équation de cette tangente est

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Fonctions	Fonctions dérivées
$f(x) = k$ définie sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$ définie sur $\mathbb{R}$
$f(x) = ax+b$ définie sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = a$ définie sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$ définie sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = e^x$ définie sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$ définie sur $\mathbb{R}$

Dans le cas général des fonctions de référence, on note n un entier naturel : $n \in \mathbb{N}$

Fonctions	Fonctions dérivées
$f(x) = x^n$ définie sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$ définie sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ définie sur $\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$ définie sur $\mathbb{R}^*$

On note u et v deux fonctions définies sur le même intervalle I.

Fonctions	Fonctions dérivées
$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
$f(x) = u(x) - v(x)$	$f'(x) = u'(x) - v'(x)$
$f(x) = u(x) \times v(x)$	$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$f(x) = \dfrac{1}{v(x)}$	$f'(x) = \dfrac{-v'(x)}{v^2(x)}$
$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$
$f(x) = u(ax+b)$	$f'(x) = au'(ax+b)$

Deux fonctions pour les physicien(ne)s :

Fonctions	Fonctions dérivées
$f(x) = \cos(x)$ définie sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}^*$	$f'(x) = \cos(x)$ définie sur $\mathbb{R}$

Fonction dérivée et variation d'une fonction :

$\boldsymbol{f}$ **est décroissante sur** $\boldsymbol{I}$ **et dérivable sur** $\boldsymbol{I}$ <u>équivaut à</u> **Pour tout** $\boldsymbol{x_0 \in I}$ **on a** $\boldsymbol{f'(x_0) \leq 0}$

$\boldsymbol{f}$ **est croissante sur** $\boldsymbol{I}$ **et dérivable sur** $\boldsymbol{I}$ <u>équivaut à</u> **Pour tout** $\boldsymbol{x_0 \in I}$ **on a** $\boldsymbol{f'(x_0) \geq 0}$

2. Dérivée de fonctions composées

Définition 1 – Fonction composée

Soient deux fonctions f et g définies respectivement sur D_f et D_g avec $g(D_g) \subset D_f$.

La fonction composée $f \circ g$ est la fonction $x \mapsto f\left[g(x)\right]$.

$$f \circ g : x \mapsto f\left[g(x)\right]$$

Exemples :

▷ Si $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto 2x - 3$ alors $f \circ g : x \mapsto f\left[g(x)\right] =$

▷ Si $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto x^2 - 1$ alors $f \circ g : x \mapsto f\left[g(x)\right] =$

▷ Si $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ alors $f \circ g : x \mapsto f\left[g(x)\right] =$

▷ Si $f : x \mapsto e^x$ et $g : x \mapsto x^2 + x + 1$ alors $f \circ g : x \mapsto f\left[g(x)\right] =$

et $g \circ f : x \mapsto g\left[f(x)\right] =$

Propriété 1 – Dérivée des fonctions composées

Soit u une fonction définie et dérivable sur I et f définie et dérivable sur $u(I)$.
La fonction $g : x \mapsto (f \circ u)(x) = f([u(x)]$ est dérivable sur I et pout tout $x \in$,

$$g'(x) = u'(x) \times f'\left[u(x)\right]$$

Démonstration

Pour tout $x \in I$, $h \in \mathbb{R}$, $x + h \in I$, $h \neq 0$
Comme u est dérivable en x et f dérivable en $u(x)$ alors :

▷ $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = \ldots\ldots\ldots$

et

▷ $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(u(x+h)) - f(u(x))}{u(x+h) - u(x)} = \ldots\ldots\ldots$

or

$$\frac{f(u(x+h)) - f(u(x))}{h} = \frac{f(u(x+h)) - f(u(x))}{u(x+h) - u(x)} \times \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

donc

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(u(x+h)) - f(u(x))}{h} = \dots\dots\dots\dots\dots$$

Méthode 1 – Dérivation de fonctions composées

Exemples :

$\triangleright$ $g : x \mapsto \sqrt{3x^2+5}$

g est définie et dérivable sur ....

On pose $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $u : x \mapsto x^2 + 5$

alors $f'(x) = \dots\dots\dots$ et $u'(x) = \dots\dots\dots$

donc $g'(x) = u'(x) \times f'(u(x)) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\triangleright$ $g : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

g est définie sur $]-\infty;-1] \cup]1;+\infty[$ et dérivable sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

On pose $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $u : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$

alors $f'(x) = \dots\dots\dots$ et $u'(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

donc $g'(x) = u'(x) \times f'(u(x)) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\triangleright$ $g : x \mapsto e^{x^2+x+1}$

g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

On pose $f : x \mapsto e^x$ et $u : x \mapsto x^2 + x + 1$

alors $f'(x) = \dots\dots\dots$ et $u'(x) = \dots\dots\dots$

donc $g'(x) = u'(x) \times f'(u(x)) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Quelques nouvelles formules à connaître :
On note u une fonction définie sur un intervalle $u(I) \subset D_f$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Fonctions	Fonctions dérivées
$f(x) = u^n(x)$	$f'(x) = n \times u'(x) \times u^{n-1}(x)$
$f(x) = \dfrac{1}{u^n(x)} = u^{-n}(x)$	$f'(x) = -n \times u'(x) \times u^{-n-1}(x) = -\dfrac{nu'(x)}{u^{n+1}(x)}$
$f(x) = e^{u(x)}$	$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$
$f(x) = \sqrt{u(x)}$	$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$f(x) = \cos u(x)$	$f'(x) = -u'(x)\sin(u(x))$
$f(x) = \sin u(x)$	$f'(x) = u'(x)\cos(u(x))$

3. Dérivées successives

Définition 2 – Dérivées n-ième

On note f une fonction définie et dérivable sur I.

▷ Si f' est dérivable sur I alors on note $f'' = (f')'$ et on la nomme la dérivée seconde de f.

▷ Si f'' est dérivable sur I alors on note $f^{(3)} = (f'')'$ et on la nomme la dérivée troisième de f.

▷ Par récurrence si f est n fois dérivable sur I alors on note $f^{(n)}$ sa dérivée n-ième et $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Exemples :
1) On note $f : x \mapsto x^3 + 4x^2 - 5x - 1$
▷ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
▷ f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

▷ f'' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(3)}(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
▷ $f^{(3)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(4)}(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
▷ $f^{(4)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(5)}(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

2) On note $f : x \mapsto e^x$
▷ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \ldots\ldots$
▷ f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = \ldots\ldots$
▷ f'' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(3)}(x) = \ldots\ldots$
▷ $f^{(3)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(4)}(x) = \ldots\ldots$
▷ $f^{(4)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(5)}(x) = \ldots\ldots$

4. Convexité, concavité et point d'inflexion

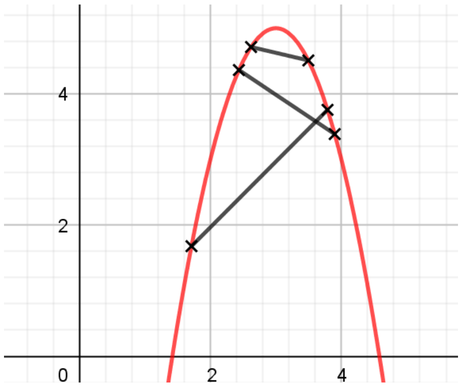
Définition 3 – Convexe et concave

▷ On dit que f est convexe sur I lorsque la courbe C_f de la fonction f est en-dessous de ses cordes sur I.

▷ On dit que f est concave sur I lorsque la courbe C_f de la fonction f est au-dessus de ses cordes sur I.

Exemples :
▷ La fonction ci-dessous est convexe :

▷ La fonction ci-dessous est concave :



Propriété 2 – Signe de f'' et convexité

▷ Si f'' est positive alors la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.
▷ Si f'' est négative alors la courbe représentative de f est en-dessous de ses tangentes.

Démonstration

▷ Si f'' est positive alors la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

Soit $a \in I$.
Si f'' est positive sur I alors f' est .... sur I.
Pour tout $x \in I$, on note $g(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$
g est dérivable sur I et $g'(x) = $ ....
Or f' est croissante donc $f'(x) - f'(a) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(a) \Leftrightarrow x > a$.
De plus $g(a) = $ ....

x	a
$g'(x)$	0
g	↘ ...... ↗

Donc 0 est le .... de g sur I et $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ ...... 0 et

$$f(x)\dots'(a)(x-a) + f(a)$$

▷ Si f'' est négative alors la courbe représentative de f est en-dessous de ses tangentes.

Soit $a \in I$.
Si f'' est négative sur I alors f' est ....sur I.
Pour tout $x \in I$, on note $g(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$
g est dérivable sur I et $g'(x) = f'(x) - f'(a)$.
Or f' est décroissante donc $f'(x) - f'(a) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(a) \Leftrightarrow x < a$.
De plus $g(a) = $ ....

x		a	
$g'(x)$		0	
g	$\nearrow$	......	$\searrow$

Donc 0 est le maximum de g sur I et $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$......0 et

$$f(x)\ldots'(a)(x-a)+f(a)$$

Propriété 3 – Propriétés (admises)

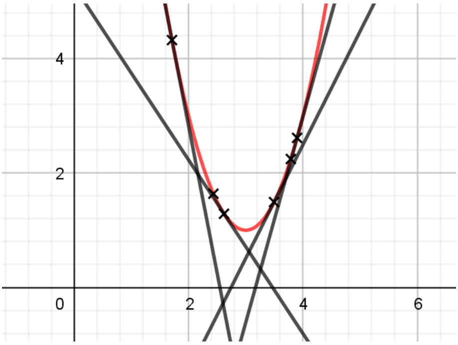
Soit f une fonction deux fois dérivable sur I. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
▷ f est convexe sur I.
▷ f' est croissante sur I.
▷ f'' est positive sur I.
▷ C_f est au-dessus de ses tangentes en tout point de I.

Propriété 4 – Propriétés (admises)

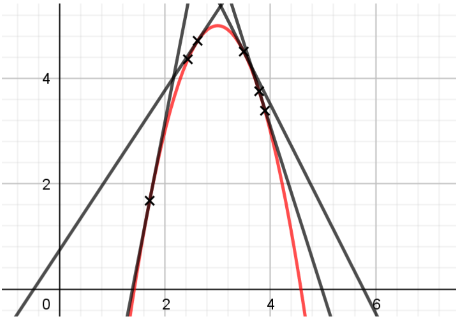
Soit f une fonction deux fois dérivable sur I. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
▷ f est concave sur I.
▷ f' est décroissante sur I.
▷ f'' est négative sur I.
▷ C_f est en-dessous de ses tangentes en tout point de I.

Exemples :

▷ La fonction ci-dessous est convexe :



▷ La fonction ci-dessous est concave :



Méthode 2 – Inégalité de convexité

On peut utiliser la notion de convexité ou de concavité pour démontrer des inégalités.
On utilise pour cela la position de la courbe par rapport à ses tangentes ou par rapport à ses cordes.

▷ On souhaite montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x+1$
On note $f : x \mapsto e^x$. f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = \ldots\ldots\ldots$
donc f est .... et C_f est .... de ses tangentes sur $\mathbb{R}$.
La tangente à C_f au point d'abscisse 0 est :
$y = f'(0)(x-0) + f(0) = 1(x-0) + 1 = x+1$
On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \ldots\ldots x+1$

▷ On souhaite montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\ln x \leq x-1$
On note $f : x \mapsto \ln x$. f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f''(x) = \ldots\ldots\ldots$
donc f est .... et C_f est .... de ses tangentes sur $]0;+\infty[$.
La tangente à C_f au point d'abscisse 1 est :
$y = f'(1)(x-1) + f(1) = 1(x-1) + 0 = x-1$
On a donc pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\ln x \ldots\ldots x-1$

Définition 4 – Point d'inflexion

Un point d'inflexion de C_f est un point où il y a un changement de convexité. Si $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion de C_f alors f'' s'annule en a et change de signe.

Exemple :

On note $f : x \mapsto \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + 3$. f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = x^2 - 2x$ et $f''(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$

f'' s'annule et change de signe en $x = 1$ donc le point A d'abscisse 1 est un point d'inflexion de C_f.