CHAPITRE 2

LES SUITES

Les suites numériques sont abordées pour la mesure d'un phénomène prise à intervalle de temps réguliers et à l'analyse (une suite numérique est l'équivalent discret (antécédent dans $\mathbb{N}$) d'une fonction numérique). La notion de suite est présente dès qu'apparaissent des procédés infinis de calculs. On en trouve, chez Archimède pour des calculs d'aires et de volumes, ou en Égypte vers 1700 av. J.-C. et plus récemment au 1$^{\text{er}}$ siècle apr. J.-C. dans le procédé d'approximation d'une racine carrée par la méthode de Héron d'Alexandrie. On voit Bernoulli, Newton, Moivre, Stirling et Wallis s'intéresser aux suites pour approcher des valeurs numériques. C'est à Lagrange que l'on doit la notation u_n avec des indices.
Véritable porte d'entrée sur l'infini, le raisonnement par récurrence a été formalisé comme principe fondamental de raisonnement par Pascal, et surtout par Peano et ses collaborateurs et avait été anticipé comme mode de démonstration par les mathématiciens anciens (nombres latéraux et diagonaux), médiévaux (al-Karaji, As-Samaw'al, Fibonacci) et renaissants (Maurolico).

Les contenus du chapitre
▷ Approche intuitive de limite, finie ou infinie, d'une suite, des opérations sur les limites, du passage à la limite dans les inégalités et du théorème des gendarmes.
▷ Limite d'une suite géométrique de raison positive.
▷ Limite de la somme des termes d'une suite géométrique de raison positive strictement inférieur à 1.
▷ Suites arithmético-Géométriques.

Les capacités attendues du chapitre
▷ Modéliser un problème par une suite donnée par une formule explicite ou une relation de récurrence.
▷ Calculer une limite de suite géométrique, de la somme des termes d'une suite géométrique de raison positive et strictement inférieur à 1.
▷ Représenter graphiquement une suite donnée par une relation de réccurence $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue d'un intervalle I dans lui-même. Conjecturer le comportement global ou asymptotique d'une telle suite.
▷ Pour une récurrence arithmético-géométrique : Recherche d'une suite constante solution particulière. Utilisation de cette suite pour déterminer toutes les solutions.

COURS

1. Rappels de première

Une suite u est une application dont l'ensemble de départ (ensemble des antécédents) est dans l'ensemble des entiers naturels. On note n à la place de x et on note u_n à la place de $u(n)$ ou de $f(x)$.

$$u : n \mapsto u_n$$

La suite u est donc une suite de termes

$$u_p\,;\ u_{p+1}\,;\ \ldots\,;\ u_{n-1}\,;\ u_n\,;\ u_{n+1}\,;\ \ldots$$

▷ u_p est le premier terme de la suite. Souvent ce sera u_0 ou u_1.
▷ u_n est le terme de rang n de la suite u (image de n par u).
▷ u_{n+1} est le terme de rang $n+1$ ou le terme suivant de u_n.
▷ u_{n-1} est le terme de rang $n-1$ ou le terme précédent de u_n.
▷ La suite de termes u_n, $n \in \mathbb{N}$, se note u ou (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 1 – Formule explicite d'une suite

La formule explicite d'une suite u est l'expression de u_n en fonction de n.

Exemples :
▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 - 5n + 3$
▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$

Définition 2 – Formule par récurrence d'une suite

La formule par récurrence d'une suite u est l'expression de u_n en fonction de un ou de plusieurs termes précédents.

Exemples :
▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{n-1} + 4$ et $u_0 = 1$
▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.

Méthode 1 – Lecture d'une relation de récurrence

Exemple : On note u la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 5$
Pour lire la relation de récurrence $u_{n+1} = 2u_n - 5$, il y a deux possibilités :
▷ : dire : u_{n+1} est égal à deux fois u_n moins 5.
▷ : dire : un terme de la suite est égal à deux fois le terme précédent moins 5.
La deuxième possibilité est bien plus pratique dans les exercices et permet de comprendre la relation qui relie un terme à l'autre et ceci quel que soit le rang auquel on est.
Autre exemple : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.

La relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ se lit : un terme de la suite est égal à la somme des deux précédents.

1.1. Variations des suites

Définition 3 – Suite croissante

(u_n) est croissante (strictement) si et seulement si pour tout $n \geq p$:

$$u_{n+1} \geq u_n \text{ (resp } u_{n+1} > u_n \text{)}$$

Définition 4 – Suite décroissante

(u_n) est décroissante (strictement) si et seulement si pour tout $n \geq p$:

$$u_{n+1} \leq u_n \text{ (resp } u_{n+1} < u_n \text{)}$$

Méthode 2 – Etudier les variations d'une suite

Pour étudier les variations d'une suite il y a plusieurs méthodes possibles.
▷ Déterminer le signe de l'écart entre deux termes pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par exemple le signe de $u_{n+1} - u_n$. Cette méthode fonctionne pratiquement dans la majorité des cas.

▷ Déterminer si lequotient entre deux termes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, est supérieur ou inférieur à 1. Par exemple le signe de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. L'inconvénient pour cette méthode est qu'il faut avoir des termes de signes constants et non nuls mais dans certains cas la méthode est rapide.

▷ Si la suite est définie de façon explicite alors on peut étudier les variations de la fonction f telle que $u_n = f(n)$. Les variations de la suite sont identiques à celle de la fonction.

Exemples :

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

2)$u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$.

2)Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 - 3n + 1$.

1.2. Suites majorées, minorées et bornées

Définition 5 – Suite majorée

Une suite (u_n) est dite **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq M$$

Définition 6 – Suite minorée

Une suite (u_n) est dite **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \geq m$$

Définition 7 – Suite bornée

Une suite (u_n) est dite **bornée** s'il existe deux réels M et m tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$m \leq u_n \leq M$$

⚠ Si (u_n) est majorée par M alors tous les nombres réels supérieurs à M sont aussi des majorants de cette suite.

⚠ Si (u_n) est minorée par m alors tous les nombres réels inférieurs à m sont aussi des minorants de cette suite.

Méthode 3 – Suites majorées, minorées et bornées

Pour montrer qu'une suite est majorée, minorée ou bornée, on peut travailler avec des inégalités ou des inéquations.

Exemples :

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, on note $u_n = \dfrac{2n-1}{n}$. Montrer que (u_n) est bornée.

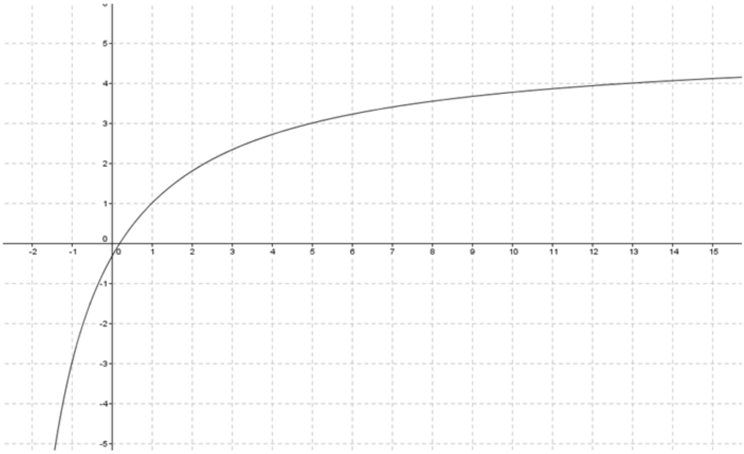
2) $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$.

2. Représentation graphique d'une suite

Représenter graphiquement les suites ci-dessous. On fera apparaître les termes sur l'axe des abscisses.

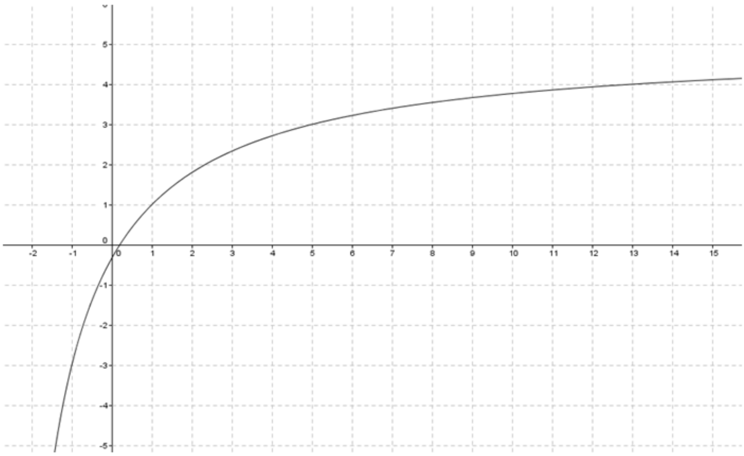
1. Formule explicite : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{5n-1}{3+n}$

   La courbe représentative ci-dessous est celle de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{5x-1}{3+x}$



2. Formule par récurrence : $u_0 = 12$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 1}{3+u_n}$

   La courbe représentative ci-dessous est celle de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{5x-1}{3+x}$

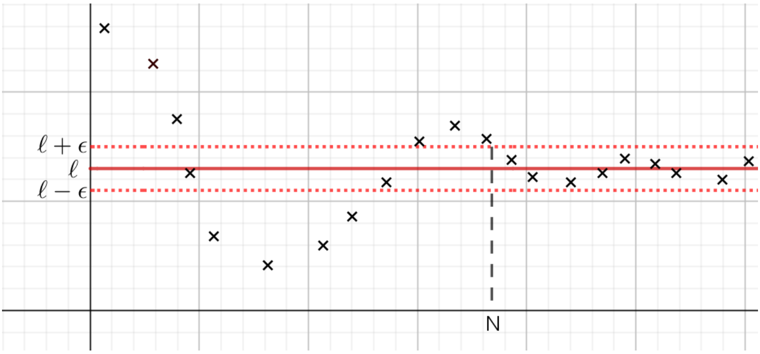


3. Limite et convergence d’une suite

Définition 8 – Limite d’une suite vers un réel

On note $\ell \in \mathbb{R}$.
On dit que (u_n) tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$ sit tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d’un certain rang N.
Mathématiquement cela se traduit par :
Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$u_n \in [\ell - \epsilon ; \ell + \epsilon] \Leftrightarrow |u_n - \ell| \leq \epsilon$$



Exemple :

On note u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{2n-1}{n}$
Avec votre calculatrice, déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Propriété 1 – Unicité de la limite

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ alors ℓ est unique.

Définition 9 – Limite d'une suite vers $+\infty$

On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]A;+\infty[$ $(A>0)$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N.

Exemple :
On note (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = n^2$
Avec votre calculatrice, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

⚠ Certaines suites n'ont pas de limite comme par exemple $w_n = (-1)^n$

Définition 10 – Convergence et divergence

Si (u_n) a pour limite $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que (u_n) converge vers ℓ.
Dans tous les autres cas (limite infinie ou pas de limite) on dit que la suite (u_n) diverge.

Propriété 2 – Limites des suites usuelles

On note $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{n\to+\infty} n = \dots\dots\dots \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2 = \dots\dots\dots \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = \dots\dots\dots$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^k = \dots\dots\dots \qquad \lim_{n\to-\infty} \frac{1}{n} = \dots\dots\dots \qquad \lim_{n\to-\infty} \frac{1}{n^k} = \dots\dots\dots$$

4. Opérations sur les limites

Propriété 3 – Limite de sommes de suites

ℓ et ℓ' sont des réels.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n}$	$\boldsymbol{\ell+\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	***F.I***

Exemple :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = n^2 - \dfrac{1}{n}$

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = \dots\dots\dots \\ \lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = \dots\dots\dots \end{cases} \quad \text{donc par somme } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dots\dots\dots.$$

Propriété 4 – Limite de produits de suites

ℓ et ℓ' sont des réels.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n}$	$\boldsymbol{\ell\times\ell'}$	$+\infty\ (\ell>0)$ $-\infty\ (\ell<0)$	$-\infty\ (\ell>0)$ $+\infty\ (\ell<0)$	$+\infty$	***F.I***

Exemple :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = n^2 - n$
C'est une forme indéterminée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = n^2\left(1 - \frac{n}{n^2}\right) = n^2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = \dots\dots\dots \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dots\dots\dots \end{cases} \quad \text{donc par produit } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dots\dots\dots.$$

Méthode 4 – Déterminer une forme indéterminée pour une somme

On s'arrange pour transformer la somme en produit, en factorisant par le terme dominant.
Exemples :

▷ Si $n \neq 0$, $n^2 + 3n = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

▷ Si $x \neq 0$, $n^3 - 3n^2 + 5n + 1 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

▷ Si $n > 0$, $3n - \sqrt{n} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Cas particulier : avec des racines carrées, on peut utiliser le produit par l'expression conjuguée.
Exemple :

▷ $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=$

Propriété 5 – Limite de quotients de suites

ℓ et ℓ' sont des réels.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	$\ell\neq 0$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell'(\ell\neq 0)$	$+\infty$	0	$\ell'(\ell'\neq 0)$	0	$\pm\infty$
$\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}}$	$\boldsymbol{\frac{\ell}{\ell'}}$	$\mathbf{0^+}$ **ou** $\mathbf{0^-}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	***F.I***	***F.I***

Exemple :
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $u_n=\dfrac{n^2+1}{n^2-1}$
C'est une forme indéterminée. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$u_n=\frac{n^2+1}{n^2-1}=$$

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n^2}=\ldots\ldots\ldots \\ \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1-\dfrac{1}{n^2}=\ldots\ldots\ldots\end{array}\right. \quad \text{donc par quotient } \lim_{n\to+\infty} u_n=\ldots\ldots\ldots.$$

Méthode 5 – Déterminer une forme indéterminée pour un quotient

Lorsqu'un quotient est une forme indéterminée pour une limite, on utilise la méthode suivante :
▷ Si on obtient $\pm\infty$ comme limite au numérateur et au dénominateur, alors on factorise et simplifie par le terme dominant le numérateur et le dénominteur.
Exemple :
▷ Déterminons la $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2-2n}{n^3-2}$
Pour tout $n\neq 0$,

$$\frac{n^2-2n}{n^2-2}=$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\dfrac{2}{n} = \dots\dots\dots \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1-\dfrac{2}{n^3} = \dots\dots\dots \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n = \dots\dots\dots\end{array}\right\} \text{donc par produit } \lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1-\dfrac{2}{n^3}\right) = \dots\dots\dots\end{array}\right\}$$

donc par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-2n}{n^2-2} = 0$

5. Comparaison et encadrement

Propriété 6 – Théorème de comparaison

(u_n) et (v_n) sont deux suites qui vérifient :
il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$
▷ Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
▷ Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Propriété 7 – Théorème d'encadrement

$\ell \in \mathbb{R}$
(u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites qui vérifient :
il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$
▷ Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$

Exemples :
1) On note (u_n) la suite définie par $u_n = n + 2 \times \cos n$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n - 2$ puis en déduire la limite de la suite (u_n).

2) Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}$.

6. Limite des suites géométriques

Définition 11 – Définition et propriétés des suites géométriques

On note u une suite géométrique de raison q et de premier terme u_p.
▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq p$, $u_{n+1} = u_n \times q$
▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq p$, $u_n = u_p \times q^{n-p}$
▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq p$, Si $q \neq 1$, $u_p + \ldots + u_n = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

Propriété 8 – Limites des suites géométriques

q est un nombre réel positif différent de 1.
▷ Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.
▷ Si $q \in [0;1[$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

Exemples :
1) Déterminer la limite de la suite définie par $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 0,5u_n$.

2) Déterminer la limite de la suite définie par $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 3u_n$.

Propriété 9 – Limites d'une somme de termes d'une suite géométrique

q est un nombre réel positif différent de 1 et $S_n = u_p + u_{p+1} + ... + u_n$.

▷ Si $q \in [0;1[$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{u_p}{1-q}$.

Démonstration

Exemples :
On note (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ telle que $u_n = 150 \times 0,8^n$. Cacluler $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

6.1. Les suites arithmético-géométriques

Définition 12 – Sutes arithmético-géométriques

Une suite (u_n) est arithmético-géométriques s'il existe deux réels a et b tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} = au_n + b$$

Propriété 10 – Suite intermédiaire

Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique de premier terme u_p et telle que pour tout entier $n \geq p$, $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$ et $b \neq 0$.
Soit ℓ le réel tel que $\ell = a\ell + b$ et (v_n) la suite définie pour tout $n \geq p$ par $v_n = u_n - \ell$, alors
la suite (v_n) est géométrique de raison a et de premier terme $v_p = u_p - \ell$.

Démonstration