CHAPITRE 1

LE LOGARITHME NÉPÉRIEN

Les calculs nécessaires à l'astronomie sont très complexes et l'objectif de la création de la fonction logarithme a été de simplifier ces calculs. John Neper (1550-1617) a inventé les logarithmes avec la particularité de transformer les produits en sommes. La simplification est telle que cette découverte se propage à grande vitesse. Il définit le logarithme comme le rapport de la distance à parcourir de deux mobiles, l'un se déplaçant à vitesse constante et l'autre à vitesse proportionnelle à la distance restant à parcourir. Vers 1625, Briggs introduit le logarithme en base 10 que l'on nomme le logarithme décimal.

Les contenus du chapitre

▷ Fonction logarithme népérien, notée ln, construite comme réciproque de la fonction exponentielle.
▷ Propriétés algébriques du logarithme.
▷ Fonction dérivée du logarithme et variations.
▷ Limite en 0 et en $+\infty$, courbe représentative. Lien entre courbes représentatives des fonctions logarithmes et exponentielles.
▷ Croissance comparée du logarithme népérien et de $x \mapsto x^n$, en 0 et en $+\infty$.

Les capacités attendues du chapitre

▷ Utiliser l'équation fonctionnelle de l'exponentielle ou du logarithme pour transformer une écriture, résoudre des équations et des inéquations.
▷ Dans le cadre d'une résolution de problème, utiliser les propriétés des fonctions exponentielles et logarithmes.

Cours

1. Définitions et notations

Pour tout $y \in]0;+\infty[$, quel est le nombre de solutions de l'équation $e^x = y$?
On note $f : x \mapsto e^x$ définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$.
▷ f est donc continue sur $\mathbb{R}$. (Sa courbe se trace sans lever le crayon)
▷ $f'(x) = \dots\dots\dots\dots$ donc f est strictement croissante donc strictement monotone sur $\mathbb{R}$.
▷ $f(]-\infty;+\infty[) = \dots\dots\dots\dots$.
On peut en déduire (voir chapitre sur la continuité),qu'il existe une unique solution à l'équation $e^x = y$. On nomme $\ln y$ cette solution et on lit : logarithme népérien de y.

Définition 1 – Logarithme népérien de x

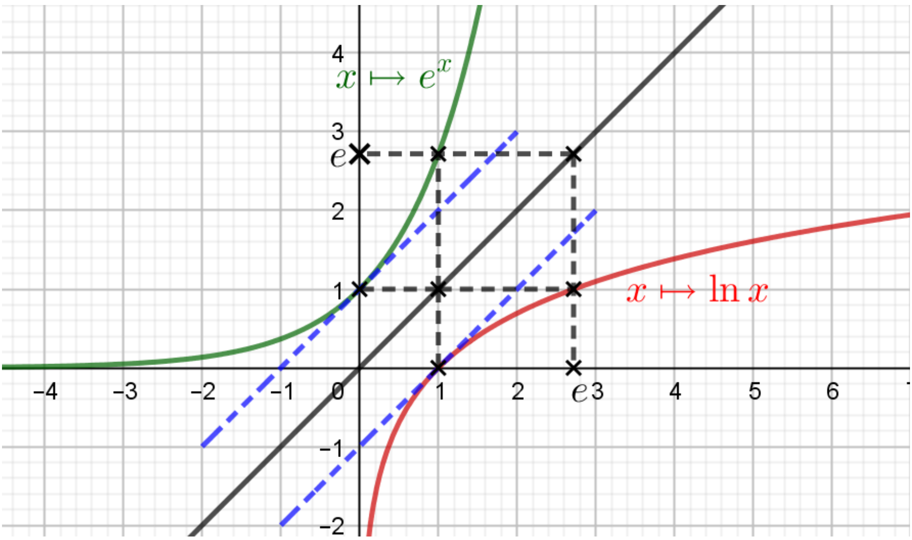
Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\ln x$ est l'unique nombre dont l'exponentielle vaut $e^{\ln x} = x$.

Définition 2 – Fonction logarithme népérien

Le fonction logarithme népérien est la fonction réciproque de la fonction exponentielle. Elle est donc définie sur $]0;+\infty[$ et à tout $x \in]0;+\infty[$ elle lui associe le nombre réel noté $\ln x$ tel que $e^{\ln x} = x$.

$$\ln : x \mapsto \ln x$$

Pour obtenir la courbe de la fonction logarithme, il est nécessaire de faire la symétrie de la courbe de la fonction exponentielle, par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Propriété 1 – Propriétés de la fonction ln

Conséquences de la construction ci-avant :
▷ $D_f = \dots\dots\dots$
▷ Pour tout $x > 0$, $e^{\ln x} = \dots\dots$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln\left(e^x\right) = \dots\dots.$
▷ $\ln 1 = \dots\dots$ et $\ln e = \dots\dots$
▷ Pour tout $x > 0$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $y = \ln x \Leftrightarrow x = \dots\dots.$
▷ ln est dérivable en 1 et $\ln'(1) = \dots\dots.$
▷ L'équation réduite de la tangente à la courbe du logarithme népérien, au point d'abscisse 1, est $y = \dots\dots\dots.$

Exemples :

▷ $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \dots\dots$
▷ $\ln x = 5 \Leftrightarrow x = \dots\dots$

2. Propriétés du logarithme

Propriété 2 – propriétés algébriques

a et b sont deux réels strictement positifs :
▷ $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$
▷ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
▷ $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
▷ (Admis) Pour tout $n \in \mathbb{R}$, $\ln\left(a^n\right) = n \times \ln a$
▷ $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2} \times \ln a$

Démonstration

Démonstration

Exemple :

▷ $\ln(6) = \ln(3 \times 2) = \dots\dots\dots$

▷ $\ln 15 - \ln 3 = \dots\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

▷ $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dots\dots\dots$

▷ $\ln 8 = \ln 2^3 = \dots\dots\dots$

Propriété 3 – Dérivation

La fonction logarithme népérien $f : x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$:

▷ Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

▷ Pour tout x tel que $u(x) > 0$, $\big(f(u(x)\big)' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Démonstration

Pour $h > 0$, on souhaite trouver $\displaystyle\lim_{\substack{h \to 0 \\ x>0}} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}$

▷ Si $Y = \ln(x+h)$ alors $x + h = \dots\dots\dots.$

▷ Si $y = \ln x$ alors $x = \dots\dots\dots.$

$$\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{\ln(\dots\dots) - \ln(\dots\dots)}{\dots\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots}$$

De plus lorsque h tend vers 0 alors Y tend vers ……, donc

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ x>0}} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{\substack{Y \to y \\ Y>y}} \frac{Y - y}{e^Y - e^y}$$

$$= \lim_{\substack{Y \to y \\ Y > y}} \left(\frac{e^Y - e^y}{Y - y} \right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{\ldots\ldots\ldots} = \frac{1}{\ldots\ldots} = \frac{1}{\ldots\ldots}$$

Exemples :

▷ $f : x \mapsto x \ln x - x$

▷ $f : x \mapsto \ln(x^2 + 3)$

Propriété 4 – Equations et inéquations

D'après les variations de la fonction $f : x \mapsto \ln x$, on peut en déduire :

▷ La fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

x	0		$+\infty$
$f'(t)$	$\|\|$	$+$	
f	$\|\|$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

Si $a > 0$ et $b > 0$,

▷ $\ln a < \ln b \Leftrightarrow$ ....

▷ $\ln a = \ln b \Leftrightarrow$ ....

▷ $\ln a > 0 \Leftrightarrow$ ....

▷ $\ln a < 0 \Leftrightarrow$ ....

x	0		1		$+\infty$
f	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Exemples :

▷ Pour $x > 0$, $\ln x < 5 \Leftrightarrow$ ....

▷ Pour $1 < x < 2$,
$\ln(x-1) > \ln(2-x) \Leftrightarrow$ ....

▷ Déterminer les valeurs de n pour que $1 - 0,85^n > 0,22$

Propriété 5 – Limites

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \text{ et } \lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$$

3. Pour aller plus loin

Définition 3 – Exposants et réels

Pour tout $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $a^{\alpha} = e^{\alpha \ln a}$.

Exemples :

▷ $3^5 = \ldots\ldots\ldots$
▷ $5^{2,7} = \ldots\ldots\ldots$

Définition 4 – Logarithme décimal

La fonction logarithme décimal (utilisée en S.P.C et S.V.T) est la fonction log définie sur $]0; +\infty[$ par

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

Exemples :
▷ $\log 10 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
▷ $\log 100 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
▷ $\log 1000 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
▷ $\log 0,1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
▷ $\log 0,01 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
▷ $\log 0,001 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

▷ Pour $n \in \mathbb{Z}$, $\log(10^n) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

▷ $(\log(x))' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$