BAC BLANC (TES / TL) Mathématiques

La qualité et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans la notation.
La calculatrice est autorisée.

EXERCICE 01 (4 points): (POUR TOUS LES CANDIDATS)

Pour chaque question, une seule des trois réponses est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Barème : Une réponse juste rapporte 0,5 point, une réponse fausse enlève 0,25 point et l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points de l'exercice est négatif, la note est ramenée à 0.

Partie A :

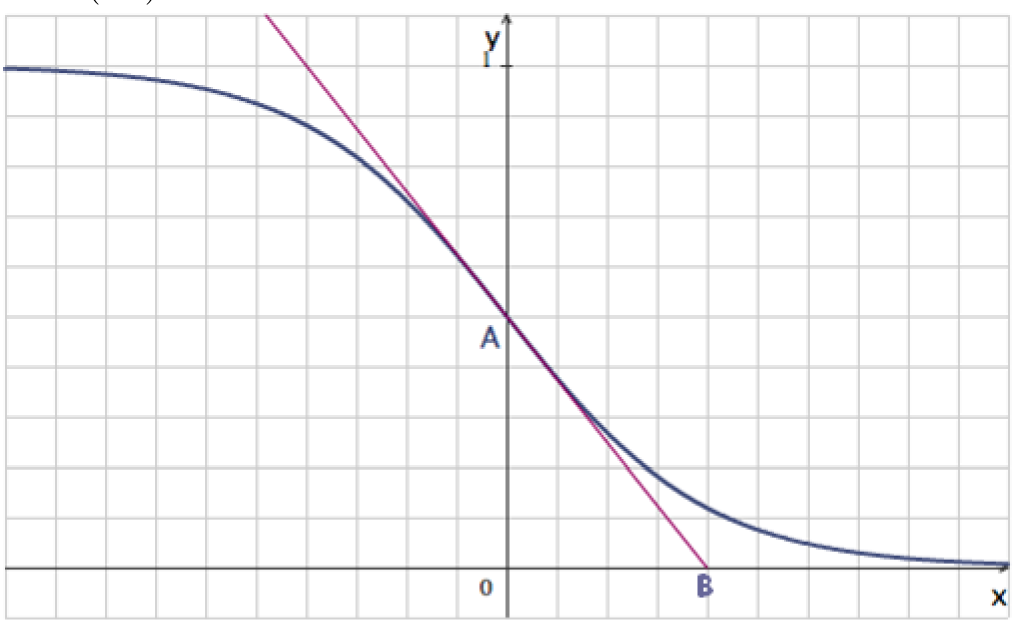
1. Un véhicule coûtait 15 000 € en 2008. Il se déprécie de 10 % par an (c'est-à-dire que son prix de revente baisse de 10% par an). Sa valeur à la vente au bout de cinq ans sera de :
   a. 7 500 € b. 8 857,35 € c. 5 000 €
2. Pour tout réel x, e^{4+2x} est égale à :
   a. $\left(e^2\right)^{2x}$ b. $\left(e^{x+2}\right)^2$ d. e^4+e^{2x}
3. Voici la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

x_i	-10	0	10
$P(X=x_i)$	0,2	0,3	0,5

   L'espérance mathématique de cette variable aléatoire est
   a. égale à 3 b. égale à -3 d. égale à 0

Partie B :

Dans cette partie, f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Sa courbe C_f est représentée ci-dessous dans un repère orthogonal. On sait que la courbe C_f passe par le point $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ et la tangente en A à la courbe C_f passe par le point $B(2;0)$



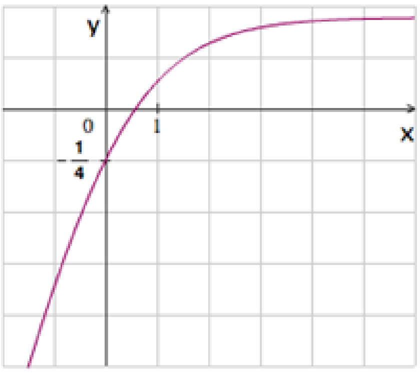
4.

a. f est concave sur $\mathbb{R}$ b. f est convexe sur $\mathbb{R}$ c. C_f admet un point d'inflexion

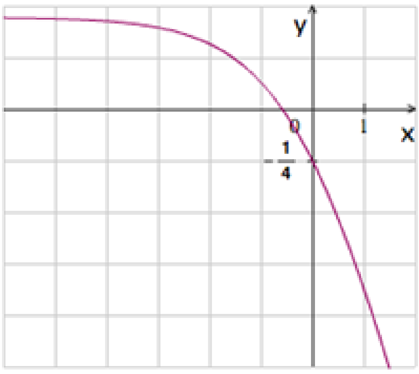
5. On note f' la dérivée de la fonction f

a. $f'(0) = -\dfrac{5}{4}$ b. $f'(0) = -\dfrac{1}{4}$ c. $f'(0) = \dfrac{1}{2}$

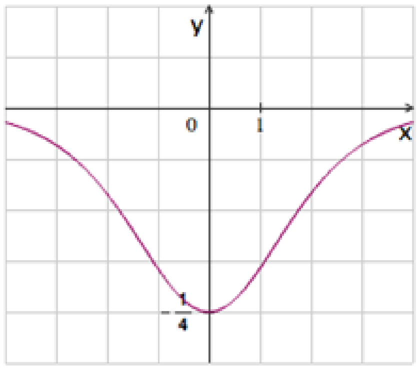
6. Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une d'elles représente f' sur $\mathbb{R}$



a. La courbe 01



b. La courbe 02



c. La courbe 03

7. g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \exp[f(x)]$

a. g est négative sur $\mathbb{R}$ b. g est décroissante sur $\mathbb{R}$ c. g est croissante sur $\mathbb{R}$

8. Sur $\mathbb{R}$, l'équation $g(x) = \sqrt{e}$

a. admet une solution b. admet deux solutions c. n'admet pas de solution

EXERCICE 02 (5points)

(POUR CEUX QUI NE SUIVENT PAS L'ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE)

Dans une ville, une enquête portant sur les habitudes des ménages en matière d'écologie a donnée les résultats suivants :

- 70 % des ménages pratiquent le tri sélectif
- Parmi les ménages pratiquant le tri sélectif, 40 % consomment des produits bio.
- Parmi les ménages ne pratiquant pas le tri sélectif, 10 % consomment des produits bio.

On choisit un ménage au hasard (tous les ménages ayant la même probabilité d'être choisis) et on note :

T l'événement « le ménage pratique le tri sélectif » et $\overline{T}$ son événement contraire.

B l'événement « le ménage consomme des produits bio » et $\overline{B}$ son événement contraire.

Les résultats seront donnés sous forme décimale

1. a. Donner sans justification la probabilité $P(T)$ de l'événement T.

   b. Donner sans justification $P_T(B)$ et $P_{\overline{T}}(B)$
2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
3. a. Calculer la probabilité de l'événement : « le ménage pratique le tri sélectif et consomme des produits bio »

   b. Montrer que la probabilité que le ménage consomme des produits bio est égale à 0,31
4. Calculer la probabilité que le ménage pratique le tri sélectif sachant qu'il consomme des produits bio (le résultat sera donné sous forme décimale arrondie au centième)
5. On choisit cinq ménages au hasard et de façon indépendante. Calculer la probabilité que deux de ces cinq ménages pratique le tri sélectif.

6. Cette ville décide de valoriser les ménages ayant un comportement éco-citoyen. Pour cela, elle donne chaque année un chèque de 20 euros aux ménages qui pratiquent le tri sélectif et un chèque de 10 euros aux ménages qui consomment des produits bio sur présentation de justificatifs (les deux montants peuvent être cumulés)
Soit S la somme d'argent reçue par le ménage.
   a. Quelle sont les différentes valeurs que peut prendre S ? (sans justification)
   b. Donner la loi de probabilité de S.
   c. Calculer l'espérance de cette loi et interpréter ce résultat.

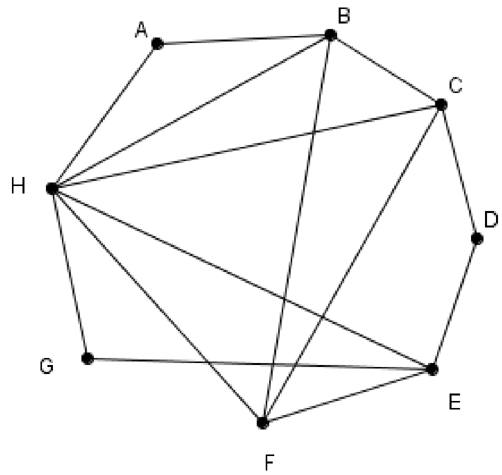
EXERCICE 02 : **(5 points)**

(**POUR CEUX QUI SUIVENT L'ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE**)

(A FAIRE SUR UNE COPIE A PART)

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes

1. On considère le graphe ci-dessous :



   a. Le graphe contient-il une chaîne eulérienne ? Justifier.
   b. Peut-on envisager un coloriage du graphe (deux sommets adjacents n'étant pas de la même couleur) avec trois couleurs ? Justifier.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont trois réels.
   La courbe de f passe par les points M(-1;-9), N(0;-1) et P(2;9)
   a. En utilisant les points M, N et P, écrire un système (S) vérifié par les réels a, b et c.
   b. Donner l'écriture matricielle du système sous la forme : AX= B
   Où $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, A et B étant deux matrices à préciser.
   c. Utiliser la calculatrice pour résoudre le système, puis donner l'expression $f(x)$

3. On considère les matrices :
   $A = \begin{pmatrix} e^2 & \frac{1}{e} \\ e^3 & -e^{-2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e^3 & e^{-3} \\ 2e^6 & -1 \end{pmatrix}$
   Calculer $A \times B$, donner les coefficients exacts, écrits le plus simplement possible.

EXERCICE 03 : (5 points) (POUR TOUS LES CANDIDATS)

Un centre aéré, ouvert tous les mercredis après midi à partir du 1er septembre, propose aux enfants de s'inscrire chaque semaine à une activité. L'une de ces activités est la natation.

Une étude effectuée sur l'année scolaire 2009/2010 montre que d'une semaine sur l'autre 5% des enfants ne se réinscrivent pas à la natation, alors que dans le même temps 10 nouveaux enfants s'y inscrivent.

Le directeur se base sur les résultats de l'année scolaire 2009/2010 pour prévoir l'évolution des inscriptions pour l'année scolaire 2010/2011.

La première semaine de l'année scolaire 2010/2011, 80 enfants se sont inscrits à la natation. On note u_0 le nombre initial d'enfants inscrits à la natation, ainsi $u_0 = 80$.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'enfants inscrits à la natation au bout de n semaines.

1. Montrer que $u_1 = 86$
2. Expliquez pourquoi , pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 10$
3. Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = u_n - 200$. Montrer que la suite (a_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
4. Pour tout entier naturel n, exprimer a_n en fonction de n. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 200 - 120 \times 0{,}95^n$
5. 5. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} - u_n = 6 \times 0{,}95^n$. En déduire que le nombre d'inscriptions à la natation augmente toutes les semaines.
6. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
   Après combien de semaines, le contexte restant le même, le nombre d'enfants inscrits à la piscine dépassera-t-il 150 ?

EXERCICE 04 : (6 points) (POUR TOUS LES CANDIDATS)

Le bénéfice en milliers d'euros que réalise une entreprise lorsqu'elle fabrique et vend x centaines d'objets (pour x compris entre 0 et 6) est donné par :

$$f(x) = (200x - 300)e^{-x-1} + 10$$

On souhaite étudier la fonction f sur l'intervalle [0;6]. On admet que cette fonction est dérivable sur l'intervalle [0;6]. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f et par C_f la courbe représentative de la fonction f.

1. Etablir que, pour tout nombre réel x de l'intervalle [0 ;6],
   $$f'(x) = (500 - 200x)e^{-x-1}$$
2. Dresser le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle [0;6].
3. Montrer que C_f admet un point d'inflexion au point de la courbe d'abscisse $x_0 = \dfrac{7}{2}$
4. Déduire des questions précédentes le nombre d'objets à vendre pour réaliser un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice maximal en euros ? (donner la réponse arrondie à l'euro).
5. Démontrer que sur l'intervalle [1;2] l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α.
6. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
7. Préciser le nombre d'objets à partir duquel l'entreprise ne vend pas à perte.