CH 01 : Dérivabilité, Continuité et Convexité TES/TL

I. Dérivabilité

Voir la fiche de rappels sur la dérivabilité

II. Continuité

a. Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est continue sur I lorsqu'on trace la courbe de la fonction f sans devoir lever le crayon.

b. Propriétés

- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$
- Les fonctions rationnelles sont continues sur chaque intervalle ne contenant pas de valeurs interdites.
- La fonction racine carré est continue sur $[0;+\infty[$
- Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

c. Théorème des valeurs intermédiaires

On considère une fonction f **définie** et **continue** sur l'intervalle [a ;b] de $\mathbb{R}$.
Si k est un nombre réel dans $[f(a);f(b)]$ alors dans ces conditions, l'équation $f(x)=k$ admet **<u>au moins une solution</u>** sur l'intervalle $[a;b]$

d. Théorème des valeurs intermédiaires et fonctions monotones

On considère une fonction f **définie** et **continue** et **monotone** (croissante ou décroissante) sur l'intervalle [a ;b] de $\mathbb{R}$.
Si k est un nombre réel dans $[f(a);f(b)]$ alors dans ces conditions, l'équation $f(x)=k$ admet **<u>une seule solution</u>** sur l'intervalle $[a;b]$

III. Convexité

a. Définition

1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est **<u>convexe</u>** (**<u>concave</u>**) sur I si pour tout point A et B de C_f alors la corde [AB] est au-dessus (en-dessous) de la courbe. (Voir schéma au verso)

2. Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est **<u>convexe</u>** (**<u>concave</u>**) sur I si et seulement si C_f est entièrement au-dessus (en-dessous) de chacune de ses tangentes. (Voir schéma au verso)

b. Propriétés

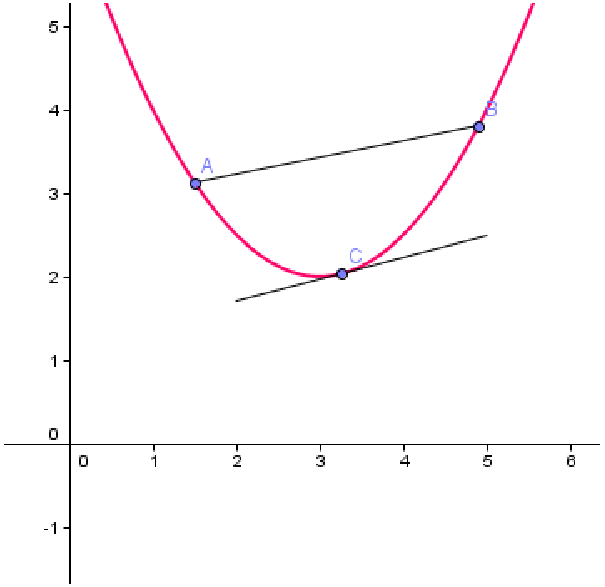
- f concave sur I $\Leftrightarrow$ - f convexe sur I
- f convexe sur I $\Leftrightarrow$ f' croissante sur I $\Leftrightarrow f''$ positive sur I
- f concave sur I $\Leftrightarrow$ f' décroissante sur I $\Leftrightarrow f''$ négative sur I
- f est convexe sur I $\Leftrightarrow$ $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}$ pour a et b de I

c. Points d'inflexion

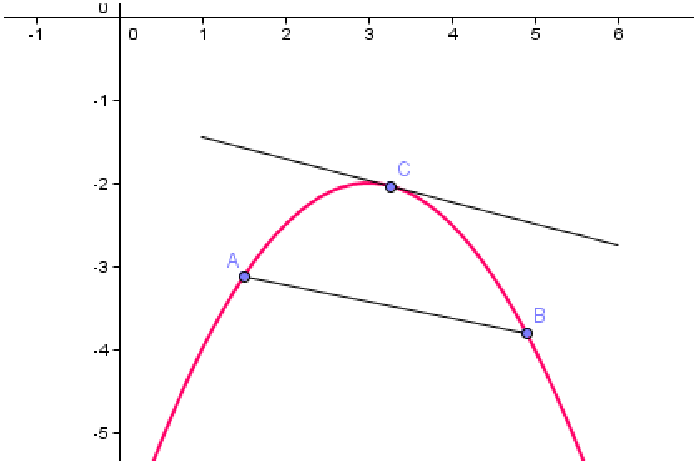
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ de représentation graphique C_f. S'il existe un point A de la courbe tel que la tangente à la courbe en A traverse la courbe en A, alors on dit que ce point A est **<u>un point d'inflexion</u>**.

- Si la dérivé **f' change de sens de variation** sur [a,b] en c alors la courbe admet un point d'inflexion au point c.
- Si la fonction **f'' s'annule et change de signe** en c de l'intervalle [a,b] alors la courbe admet un point d'inflexion au point c.

- **Fonction convexe**



- **Fonction concave**



- **Point d'inflexion**