La calculatrice est autorisée pour ce devoir.

Exercice 1 : (3 pts)

On note u la suite définie par $u_n = \dfrac{3n-2}{4n}$ pour tout $n \geq 1$.

1. Déterminer la limite, quand n tend vers plus l'infini, de la suite u.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2}{4n(n+1)}$.
3. Déduire de la question précédente le sens de variation de la suite u.

Exercice 2 : (4 pts)

On note u la suite définie par : $u_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. Calculer $u_n = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + \ldots + 12100$

Exercice 3 : (3 pts)

On note u la suite définie par : $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = 3u_n + 2$
Démontrer par récurrence que u est décroissante.

Exercice 4 : (10 pts)

Partie A

Soit la suite (U_n) définie par la donnée de son premier terme $U_0 = 14\ 000$ et par la relation :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ U_{n+1} = 1,04 \times U_n + 200.$$

1. Calculer U_1 et U_2.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = U_n + 5\ 000$.
   (a) Calculer V_0.
   (b) Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n.
   En déduire que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (c) Exprimer V_n en fonction de n.
   (d) En déduire que $U_n = 19\ 000 \times (1,04)^n - 5\ 000$.

Partie B

On suppose que U_n représente le salaire annuel d'une personne pour l'année $2002 + n$, n étant un entier naturel.

1. Calculer le salaire annuel, arrondi à l'euro, de la personne en 2010.
2. (a) Résoudre avec votre calculatrice l'inéquation d'inconnue x : $1,04^x \geqslant \dfrac{33}{19}$.
   (b) À partir de quelle année le salaire annuel de cette personne aura-t-il doublé par rapport à celui de 2002 ?