CHAPITRE 8

COMBINATOIRE ET DÉNOMBREMENT

Les propriétés arithmétiques du Triangle de Pascal étaient présentes dans les travaux combinatoires des mathématiques indiennes et chinoises. La combinatoire était un objet de prédilection des récréations mathématiques dès l'Antiquité et est encore présente chez des arithméticiens du XIXe siècle (Lucas, Delannoy, Laisant). Il est par ailleurs pertinent de souligner le développement récent des « mathématiques discrètes », motivé notamment par l'informatique et l'intelligence artificielle.

Les contenus du chapitre

▷ Principe additif : nombre d'éléments d'une réunion d'ensembles deux à deux disjoints.

▷ Principe multiplicatif : nombre d'éléments d'un produit cartésien. Nombre de k-uplets (ou k-listes) d'un ensemble à n éléments.

▷ Nombre de parties d'un ensemble à n éléments. Lien avec les n-uplets de $\{0,1\}$, les mots de longueur n sur un alphabet à deux éléments, les chemins à deux éléments, les chemins d'un arbre, les issues dans une succession de n épreuves de Bernoulli.

▷ Nombre de k-uplets d'éléments d'un ensemble à n éléments. Définition de $n!$ comme nombre d'éléments d'un ensemble fini à n éléments.

▷ Combinaisons de k éléments d'un ensemble à n éléments : parties à k éléments de l'ensemble. Représentation en terme de mots ou de chemins.

▷ Pour $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

▷ Explication pour $k = 0,1,2$. Symétrie et triangle de Pascal.

Les capacités attendues du chapitre

▷ Dans le cadre d'un problème de dénombrement, utiliser une représentation adaptée (ensembles, arbres, tableaux, diagrammes) et reconnaître les objets à dénombrer.

▷ Effectuer des dénombrements simples dans des situations issues de divers domaines scientifiques (informatique, génétique, théorie des jeux, probabilités, etc.).

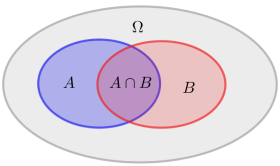
Cours

1. Principe additif et multiplicatif

On note Ω un ensemble, A et B deux sous-ensembles de Ω (ensembles inclus dans Ω).

Définition 1 – Intersection de deux ensembles

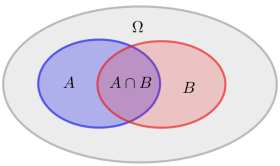
$A \cap B$: ensemble des éléments qui sont dans A et dans B.



C'est donc les élèments de la partie qui est rouge et bleue.

Définition 2 – Réunion de deux ensembles

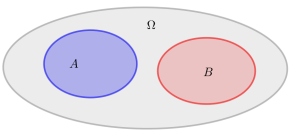
$A \cup B$: ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B ou dans $A \cap B$.



C'est donc les élèments de la partie bleue et de la partie rouge et de la partie rouge et bleue.

Définition 3 – Ensembles disjoints

A et B sont dits disjoints si $A \cap B = \emptyset$ (ensemble vide).
Il n'y a aucun élément dans A et B.



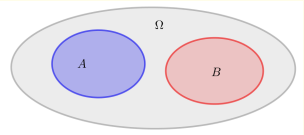
Dans la suite du cours on notera $\text{Card}(A)$ le cardinal de l'ensemble A et donc le nombre d'éléments dans cet ensemble.

Propriété 1 – Nombre d'éléments de $A \cup B$ avec A et B disjoints

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$$

Démonstration

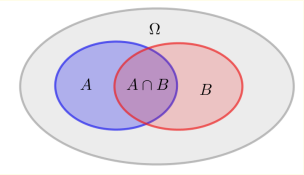
C'est évident vu le schéma ci-dessous.



Propriété 2 – Nombre d'élément de $A \cup B$

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$

Démonstration



$A \cup B = (A \backslash (A \cap B)) \cup (A \cap B) \cup (B \backslash (A \cap B))$ et ces ensembles sont disjoints, donc

$$\begin{aligned}\text{Card}(A \cup B) &= \text{Card}(A \backslash (A \cap B)) + \text{Card}(A \cap B) + \text{Card}(B \backslash (A \cap B)) \\ &= \text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B) + \text{Card}(A \cap B) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B) \\ &= \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)\end{aligned}$$

Exemple :
On met douze jetons numérotés de 1 à 12 dans un sac et on tire au hasard un jeton.
On considère les évènements :
A : « le jeton tiré porte un nombre pair »
B : « le jeton tiré porte un nombre multiple de 3 »
C : « le jeton tiré porte un nombre multiple de 3, non pair »

$A = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$ et $\text{Card}(A) = \ldots\ldots$
$B = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$ et $\text{Card}(B) = \ldots\ldots$
$C = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$ et $\text{Card}(C) = \ldots$

$A \cap B = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$ et $\text{Card}(A \cap B) = \ldots\ldots$
$A \cup B = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$ et $\text{Card}(A \cup B) = \ldots\ldots$

$\text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B) = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$

2. Nombre de parties d'un ensemble à n éléments

Définition 4 – Produit cartésien de deux ensembles

On nomme produit cartésien de deux ensembles A et B l'ensemble des couples (a, b) tels que $a \in A$ et $b \in B$.

$$A \times B = \{(a; b) \text{ tels que } a \in A \text{ et } b \in B\}$$

Exemples :
▷ $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n, m) \text{tels que } n \in \mathbb{N} \text{ et } m \in \mathbb{N}\}$
▷ Si $A = \{$trèfle, carreau, pique, cœur$\}$
et $B = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ;$ Roi ; Dame ; Valet $\}$ alors $A \times B$ représente un jeu de 52 cartes.

Propriété 3 – Nombre d'éléments de $A \times B$

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$$

Démonstration

On note A et B deux ensembles tels que $\text{Card}(A) = n$ et $\text{Card}(B) = m$.
$A \times B = \{(a\,;\, b) \text{tels que } a \in A \text{ et } b \in B\}$
Si on fixe un élément de A alors on peut lui associer tous les éléments de B donc pour un élément de A on peut former $\text{Card}(B)$ couples, avec les éléments de B, donc :

$$\text{Card}(A \times B) = \sum_{a \in A} \text{Card}(B) = \text{Card}(B) \sum_{a \in A} 1 = \text{Card}(B) \times \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots \times \ldots\ldots$$

Exemples :
▷ Si $A = \{$trèfle, carreau, pique, cœur$\}$
et $B = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10;$ Roi ; Dame ; Valet $\}$ alors

$$\text{Card}(A \times B) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

▷ Si A est un ensemble à n éléments alors $A \times A$ est l'ensemble des couples de deux éléments de A et :

$$\text{Card}(A \times A) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(A) = (\text{Card}(A))^2 = n^2$$

Définition 5 – Produit cartésien de n ensembles

On nomme produit cartésien de n ensembles A_1, A_2, $\ldots, A_n$ l'ensemble des couples $(a_1\ ,\ a_2, \ldots,\ a_n)$ tels que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $a_i \in A_i$.

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1\ ,\ a_2, \ldots\ , a_n) \text{ tels que } a_i \in A_i \text{ pour tout } i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$$

Exemple :

▷ Si A est un ensemble à n éléments alors $\overbrace{A \times A \times \ldots \times A}^{k \text{ facteurs}}$ est l'ensemble des couples de k éléments de A ou l'ensemble des k-uplets (k-listes) d'un ensemble à n éléments.

3. Nombre de k-uplets d'éléments d'un ensemble à n éléments

On tire dans un ensemble A de n éléments, successivement et avec remise, k éléments. Ces éléments sont ordonnés mais pas forcément distincts. On obtient un k-uplet (ou une k-liste).

Propriété 4 – Nombre de k-uplets (ou k-listes) différents d'un ensemble à n éléments

$$\text{Card}(\overbrace{A \times A \times \ldots \times A}^{k \text{ facteurs}}) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(A) \times \ldots \times \text{Card}(A) = n^k$$

Démonstration

Faisons une démonstration par récurrence :

On note $\mathbf{P}_n$ la propriété : $\text{Card}(\overbrace{A \times A \times \ldots \times A}^{k \text{ facteurs}}) = n^k$, pour $n \in \mathbb{N}$

Initialisation : (Pour $n = 1$)

Il est évident que $\text{Card}(A) = n = n^1$ donc $\mathbf{P}_1$ est vraie.

Hérédité : on suppose que $\mathbf{P}_k$ est vraie pour un rang k, montrons que dans ce cas $\mathbf{P}_{k+1}$ l'est aussi.

$$\overbrace{A \times A \times \ldots \times A}^{(k+1) \text{ facteurs}} = \overbrace{A \times A \times \ldots \times A}^{k \text{ facteurs}} \times \ldots\ldots$$

donc d'après la propriété précédente :

$$\text{Card}(\overbrace{A \times A \times \ldots \times A}^{(k+1) \text{ facteurs}}) = \ldots\ldots\ldots \times \ldots\ldots = \ldots\ldots$$

donc $\mathbf{P}_{k+1}$ est vraie.

Conclusion :

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{P}_1 \text{ est vraie}\\ \mathbf{P}_k \text{ implique } \mathbf{P}_{k+1}\end{array}\right\} \text{donc pour tout } n \in \mathbb{N},$$

$$\text{Card}(\overbrace{A \times A \times \ldots \times A}^{k \text{ facteurs}}) = n^k$$

Exemples :
▷ On lance deux dés (un rouge et un vert) à 6 faces. On note le nombre de deux chiffres formé par ces deux dés en considérant que 65 n'est pas égal à 65. Combien y a-t-il de nombres possibles ?
On note $A = \{1;2;3;4;5;6\}$ alors on cherche $\text{Card}(A \times A) = \ldots\ldots \times \ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$

4. Arrangements de k éléments d'un ensemble à n éléments

On tire dans un ensemble A de n éléments, successivement et sans remise, k éléments. Ces éléments sont ordonnés et distincts. On obtient un arrangement de k éléments parmi n et on note A_k^n le nombre d'arrangements de k éléments parmi n.
Le fait que les éléments soient ordonnés signifie que (a, b, c) n'est pas identique à (a, c, b).

Propriété 5 – Nombre d'arrangements d'un ensemble à n éléments

$$A_k^n = n \times (n-1) \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$n!$ (factorielle n) a été définie au chapitre sur les suites :

$$0! = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*, n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$$

Démonstration

▷ Pour le premier élément on a n possibilités.
▷ Pour le deuxième il reste seulement $(n-1)$ possibilités puisqu'il n'y a pas de remise.
▷ Pour le troisième il reste seulement $(n-2)$ possibilités puisqu'il n'y a pas de remise.
...
▷ Pour le dernier il reste $(n-k+1)$ possibilités.
On obtient des couples formés par un produit cartésien de k ensembles de cardinal n, $n-1$, $n-2$, ..., $n-k+1$.
donc il y a $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1)$ arrangements possibles et

$$A_k^n = n \times (n-1) \times (n-k+1)$$

de plus :

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n \times (n-1) \times \ldots (n-k+1) \times (n-k) \times \ldots \times 2 \times 1}{(n-k) \times \ldots \times 2 \times 1}$$
$$= n \times (n-1) \times (n-k+1) = A_k^n$$

donc :

$$A_k^n = n \times (n-1) \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Exemple :

▷ Le nombre de possibilités de ranger 4 voitures dans un parking de 6 places est $A_4^6 =$ .....

5. Combinaisons de k éléments d'un ensemble à n éléments

On tire dans un ensemble A de n éléments, successivement et sans remise, k éléments. Ces éléments ne sont pas ordonnés et sont distincts. On obtient une combinaison de k élements parmi n et on note C_k^n ou $\binom{n}{k}$ le nombre de combinaisons de k éléments parmi n.
Le fait que les éléments ne soient pas ordonnés signifie que (a, b, c) est identique à (a, c, b).

Propriété 6 – Nombre de combinaisons d'un ensemble à n éléments

$$\binom{n}{k} = \frac{A_k^n}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Démonstration

Pour chaque arrangement il y a $k!$ permutations possibles qui donnent le même k-uplet d'où le résultat.

$$\binom{n}{k} = \frac{A_k^n}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

▷ L'anagramme d'un mot est un autre mot que l'on peut fabriquer avec les mêmes lettres que le mot de départ. Un mot en mathématiques est une succession de lettres mais qui n'a pas de sens. Par exemple : BEFT est un mot.

Combien y a-t-il d'anagrammes au mot « MATHS » ?
Il y a .....! = ... anagrammes possibles du mot MATHS.

Exemples :

▷ On souhaite choisir trois élèves dans une classe de 35. L'ordre des élèves n'étant pas important il y a $\binom{35}{3} = \ldots\ldots\ldots$ possibilités.

▷ Une boîte contient 15 boules numérotées de 1 à 15. On procède au tirage de 6 boules simultanément. Pour obtenir le nombre de résultats différents, on compte le nombre de combinaisons $\binom{15}{6} = \ldots\ldots\ldots$

▷ Chez le marchand de glace il y a cinq parfums. Calculer combien il y a de possibilités de faire des cornets avec à chaque fois deux parfums différents.

Il y a $\binom{5}{2}$ possibilités.

▷ On note $A = \{a, b, c, d\}$

Combinaisons de 3 éléments	Arrangements de 3 éléments
abc	.....
abd	.....
acd	.....
bcd	.....

6. Propriétés des combinaisons

Etudions les nombres de combinaisons $\binom{n}{k}$ pour $k \in \{1; \ldots; n\}$.

Propriété 7 – Valeurs particulières

Pour $n \geq 1$, $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$ et $\binom{n}{n} = 1$

Démonstration

▷ Il y a une seule possibilité de choisir 0 élément parmi n : « ne pas en choisir »

donc $\binom{n}{0} = \ldots\ldots$

ou alors $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0!(n-0)!} = \ldots\ldots$

▷ Il y a n possibilités de choisir 1 élément parmi n, donc $\binom{n}{1} = \ldots\ldots$

ou $\binom{n}{1} = \dfrac{n!}{1!(n-1)!} = \ldots\ldots$

▷ Il y a 1 possibilité de choisir n éléments parmi n, donc $\binom{n}{n} = \ldots\ldots.$

ou alors $\binom{n}{n} = \dfrac{n!}{n!(n-n)!} = \ldots\ldots$

Propriété 8 – Symétrie

Pour $n \geq 1$ et $k \in \{1; \ldots; n\}$,

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

ou alors $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}$

Démonstration

Il y a autant de possibilités de choisir k éléments parmi n que de choisir les $n-k$ qui restent, donc :

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

Propriété 9 – Formule de Pascal

Pour $n \geq 1$ et $k \in \{1; \ldots; n-1\}$,

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Démonstration

Il y a plusieurs méthodes pour démontrer cette égalité. Nous allons, ici, en présenter deux différentes.

Première méthode : à l'aide des factorielles
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, \ldots, n-1\}$,

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\\
&= \frac{n!}{k!(n-k)(n-k-1)!}+\frac{n!}{k!(k+1)(n-k-1)!}\\
&= \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!}+\frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!}\\
&= \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!}\\
&= \frac{n!(1+n)}{(k+1)!(n-k)!}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}\\
&= \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

Deuxième méthode : à l'aide d'un dénombrement
On note $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, ..., n-1\}$,
Soit E un ensemble à $n+1$ éléments et a un élément de E.
► Le nombre de parties de E à $k+1$ éléments est $\binom{n+1}{k+1}$
► Une partie de E à $k+1$ éléments de E contenant a, contient k éléments choisis parmi les n éléments de E autres que a, donc le nombre de ces parties est $\binom{n}{k}$
► Une partie de E à $k+1$ éléments de E ne contenant pas a, contient $k+1$ éléments choisis parmi les n éléments de E autres que a, donc le nombre de ces parties est $\binom{n}{k+1}$
CONCLUSION : Le nombre des parties de E à $k+1$ éléments, est la somme du nombre des parties de E à $k+1$ éléments contenant a, et du nombre des parties de E à $k+1$ éléments ne contenant pas a :

$$\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$$

De ces trois propriétés, on peut en déduire le triangle de Pascal, très utile dans de nombreux domaines sans rapport avec le dénombrement, comme par exemple le développement de $(a+b)^n$.

n							
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
	0	1	2	3	4	5	6
				k			

Exemple :
Utilisation du triangle de Pascal pour développer $(a+b)^4$.
La quatrième ligne du tableau nous donne les coefficients du développement. Pour les puissances, il suffit de commencer par a^4 et b^0 puis de faire diminuer les puissances de a et d'augmenter celles de b.
On obtient donc

$$(a+b)^4 = 1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Propriété 10 – Valeurs particulières

Pour $n \geq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Démonstration

Par définition $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments. Donc $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ est la somme des nombres de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments, pour toutes les valeurs de k possibles.
On cherche donc le nombre de parties d'un ensemble à n éléments.
On note E un ensemble à n éléments et A une partie de E ayant k éléments.
Si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ alors on peut lui associer le n-uplet

$$(\ \overbrace{1;1;\ldots;1}^{k \text{ coordonnées}}\ ;\ \overbrace{0;0;\ldots;0}^{(n-k) \text{ coordonnées}}\ )$$

donc il y a autant de parties de E que de choix de n nombres dans l'ensemble $\{0;1\}$.
Le nombre de n-uplets d'éléments de $\{0;1\}$ est 2^n donc

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

7. Programme en Python

```python
from  math import*

def Fact(n):
    result=1
    for i in range(1,n+1):
        result=result*i
    return result

def Arrangements(n,k):
    return Fact(n)/(Fact(n-k))

def Combinaison(n,k):
    return Fact(n)/(Fact(k)*Fact(n-k))

def trianglePascal(n):
    T = [[0] * (n+1) for p in range(n+1)]
    for n in range(n+1):
        if n == 0:
            T[n][0] = 1
        else:
            for k in range(n+1):
                if k == 0:
                    T[n][0] = 1
                else:
                    T[n][k] = T[n-1][k-1] + T[n-1][k]
    return T
```

Résultats obtenus

```python
Arrangements(10,2)
90.0
Arrangements(10,3)
720.0
Combinaison(10,2)
45.0
Combinaison(10,3)
120.0
Fact(10)
3628800
Fact(4)
24
trianglePascal(6)
[[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
[1, 1, 0, 0, 0, 0, 0],
[1, 2, 1, 0, 0, 0, 0],
[1, 3, 3, 1, 0, 0, 0],
```

```
[1, 4, 6, 4, 1, 0, 0],
[1, 5, 10, 10, 5, 1, 0],
[1, 6, 15, 20, 15, 6, 1]]
```