CHAPITRE 7

LE CALCUL D'INTÉGRALES

L'étude et le calcul des intégrales apparait dans des domaines très variés des sciences. Calcul de longueur d'une courbe, calcul d'aire, de volume, de flux, de vitesse et accélération moyenne, calcul de probabilité, résolution des équations différentielles, calcul de clairance en médecine, etc.
Leibniz, Riemann et Lebesgue sont les principaux mathématiciens qui ont introduit et développé ce domaine des mathématiques.

Les contenus du chapitre

▷ Définition de l'intégrale d'une fonction continue positive définie sur un segment $[a,b]$, comme aire sous la courbe représentative de f. Notation $\int_a^b f(x)dx$.

▷ Théorème : si f est une fonction continue positive sur $[a,b]$ alors la fonction F_a définie sur $[a,b]$ par $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.

▷ Sous les hypothèses du théorème, relation $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f. Notation $[F(x)]_a^b$.

▷ Théorème : toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

▷ Définition par les primitives de $\int_a^b f(x)dx$ lorsque f est une fonction continue de signe quelconque sur un intervalle contenant a et b.

▷ Linéarité, positivité et intégration des inégalités. Relation de Chasles.

▷ Valeur moyenne d'une fonction.

▷ Intégration par parties.

Les capacités attendues du chapitre

▷ Estimer graphiquement ou encadrer une intégrale, une valeur moyenne.

▷ Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive, à l'aide d'une intégration par parties.

▷ Majorer (minorer) une intégrale à partir d'une majoration (minoration) d'une fonction par une autre fonction.

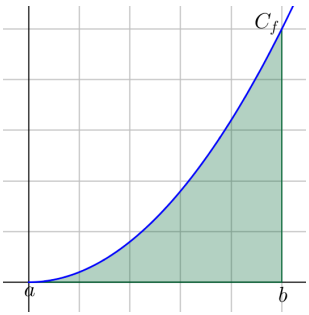
▷ Calculer l'aire entre deux courbes.

▷ Interpréter une intégrale, une valeur moyenne dans le contexte d'une autre discipline.

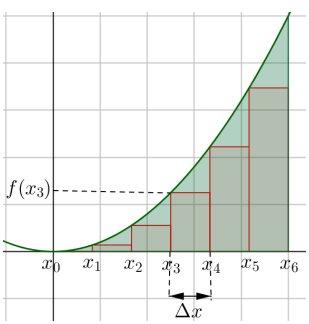
Cours

1. Introduction

On note f une fonction continue et positive sur $[a, b]$. On souhaite déterminer l'aire A de la partie verte entre la courbe C_f, la droite des abscisses et les deux droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$.

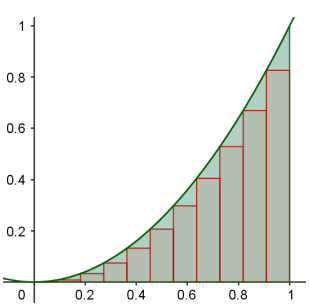


Pour cela on va découper le segment $[a, b)$ en six segments de même largeur Δx et on trace les rectangles formés par ces largeurs et la courbe de la fonction f. On note A_6 la somme des aires de ces six rectangles.



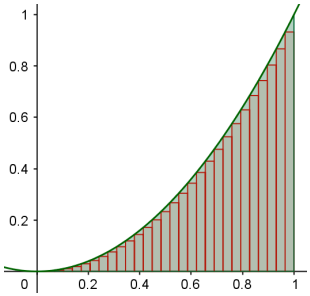
$A_6 =$ .....

On continue la même méthode mais avec 11 segments de même largeur que l'on note encore Δx mais la quantité Δx est plus petite que la précédente.



$A_{11} =$ .....

On continue avec une infinité de rectangles et donc un Δx de plus en plus petit et qui tend vers 0. On voit que la somme des rectangles rouges se rapproche de plus en plus de l'aire verte cherchée.



$A = \lim\limits_{n \to +\infty}$ .....

On note cette Aire :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x$$

⚠ Une somme $\sum$ infinie devient une intégrale $\int$ et un écart Δx qui devient petit se note dx

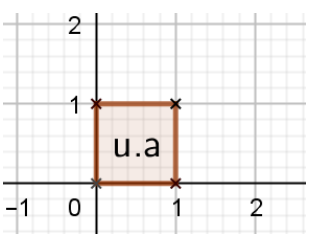
$\int_a^b f(x)dx$ se lit l'intégrale de a à b de $f(x)dx$

2. Intégrale d'une fonction continue et positive sur un segment $[a, b]$

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit f une fonction continue et positive sur un segment $[a, b]$ et C_f sa courbe représentative dans ce repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Définition 1 – Unité d'aire

L'unité d'aire dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est l'aire du rectangle formé par les unités du repère.

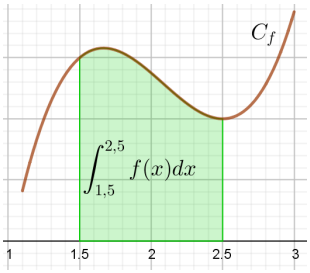


Définition 2 – Intégrale et Aire

L'intégrale de a à b de f est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine D délimité par C_f, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$.

On note cette intégrale $\int_a^b f(x)dx$.

L'aire de la partie verte ci-dessous est $A = \left(\int_{1,5}^{2,5} f(x)dx\right) \times$ u.a



$\int_a^b f(x)dx$ se lit : intégrale de a à b de $f(x)dx$ ou somme de a à b de $f(x)dx$.

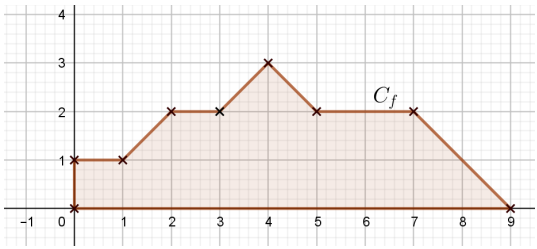
⚠ Dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$ la lettre x est une variable muette donc elle peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\theta)d\theta$$

⚠ a et b sont les bornes de l'intégrale.

⚠ $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Exemple :



f est continue et positive sur $[0;9]$ et $\displaystyle\int_0^9 f(x)\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$.
L'aire marron est donc de $A = \ldots\ldots\ldots\ldots \times$ u.a.

Propriété 1 – Théorème fondamental pour f continue, positive sur $[a,b]$

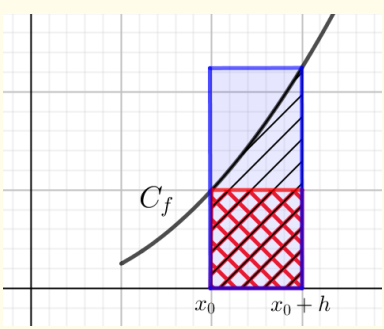
Si f est une fonction continue et positive sur $[a,b]$ alors $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable et $F' = f$. F est donc un primitive de f.

Démonstration

▶ On note f une fonction continue, positive et croissante sur $[a,b]$ et $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$
On note $x_0 \in [a,b]$, $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ et $h > 0$ donc $x_0 + h > x_0$

En raisonnant sur les aires, on remarque que

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$



Comme f est croissante sur $[a,b]$ alors

$$x_0 \leq t \leq x_0 + h \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots \leq f(t) \leq \ldots\ldots\ldots$$

En passant au calcul d'aire, on a

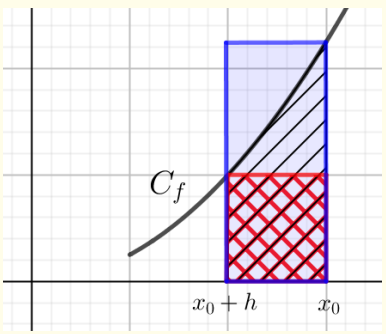
$$\text{Aire rouge} \leq \text{Aire noire} \leq \text{Aire bleue}$$

comme $h > 0$, on a donc

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \leq F(x_0+h) - F(x_0) \leq \ldots\ldots\ldots\ldots \Leftrightarrow \ldots\ldots \leq \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leq \ldots\ldots$$

On peut donc en déduire que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \ldots\ldots$ qui est un réel unique donc F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.

► On note f une fonction continue, positive et croissante sur $[a,b]$ et $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$
On note $x_0 \in [a,b]$, $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ et $h < 0$ donc $x_0 + h < x_0$



$$F(x_0) - F(x_0+h) = \int_a^{x_0} f(t)\,dt - \int_a^{x_0+h} f(t)\,dt = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Comme f est croissante sur $[a,b]$ alors

$$x_0 + h \leq t \leq x_0 \Leftrightarrow \ldots\ldots \leq f(t) \leq \ldots\ldots$$

En passant au calcul d'aire, on a

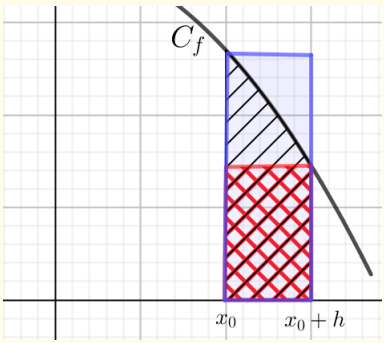
$$\text{Aire rouge} \leq \text{Aire noire} \leq \text{Aire bleue}$$

comme $h < 0$, on a donc

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \leq F(x_0) - F(x_0+h) \leq \ldots\ldots\ldots\ldots \Leftrightarrow \ldots\ldots \leq \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leq \ldots\ldots$$

On peut donc en déduire que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \ldots\ldots$ qui est un réel unique donc F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.

► On note f une fonction continue, positive et décroissante sur $[a,b]$ et $F(x)=\int_a^x f(t)dt$
On note $x_0 \in [a,b]$, $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ et $h>0$ donc $x_0+h>x_0$



$$F(x_0+h)-F(x_0)=\int_a^{x_0+h} f(t)dt-\int_a^{x_0} f(t)dt=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Comme f est décroissante sur $[a,b]$ alors

$$x_0 \leq t \leq x_0+h \Leftrightarrow \ldots\ldots \leq f(t) \leq \ldots\ldots$$

En passant au calcul d'aire, on a

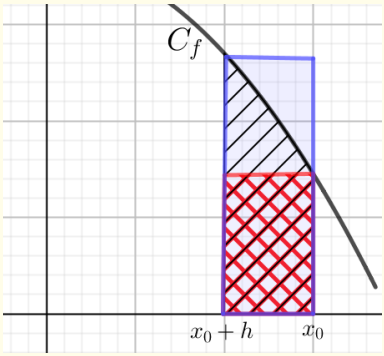
$$\text{Aire rouge} \leq \text{Aire noire} \leq \text{Aire rouge}$$

comme $h>0$, on a donc

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \leq F(x_0+h)-F(x_0) \leq \ldots\ldots\ldots\ldots \Leftrightarrow \ldots\ldots \leq \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leq \ldots\ldots$$

On peut donc en déduire que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\ldots\ldots$ qui est un réel unique donc F est dérivable en x_0 et $F'(x_0)=f(x_0)$.

► On note f une fonction continue, positive et décroissante sur $[a,b]$ et $F(x)=\int_a^x f(t)dt$
On note $x_0 \in [a,b]$, $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ et $h<0$ donc $x_0+h<x_0$



$$F(x_0)-F(x_0+h)=\int_a^{x_0} f(t)\,dt-\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Comme f est décroissante sur $[a,b]$ alors

$$x_0+h\leq t\leq x_0 \Leftrightarrow \ldots\ldots\leq f(t)\leq\ldots\ldots$$

En passant au calcul d'aire, on a

$$\text{Aire rouge}\leq\text{Aire noire}\leq\text{Aire bleue}$$

comme $h<0$, on a donc

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\leq F(x_0)-F(x_0+h)\leq\ldots\ldots\ldots\ldots\Leftrightarrow\ldots\ldots\leq\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}\leq\ldots\ldots$$

On peut donc en déduire que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)$ qui est un réel unique donc F est dérivable en x_0 et $F'(x_0)=f(x_0)$.

Propriété 2 – Primitives d'une fonction continue et positive sur $[a,b]$

Si f est continue et positive sur $[a,b]$ alors $F:x\mapsto\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f sur $[a,b]$ qui s'annule en a. Toutes les primitives de f sont les fonctions F telles que $\phi(x)=F(x)+\lambda$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.

Démonstration

D'après la propriété précédente F est une primitive de f sur $[a,b]$ et $F'=f$
$F(a)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ dont F s'annule en $\ldots\ldots$.
$\Rightarrow$ Montrons que $\phi:x\mapsto F(x)+\lambda$, où $\lambda\in\mathbb{R}$ est une primitive de f sur $[a,b]$.
Pour tout $x\in[a,b]$,
ϕ est dérivable sur $[a,b]$ et $\phi'(x)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
Donc ϕ est bien une primitive de f sur $[a,b]$.

$\Leftarrow$ Montrons que si F et ϕ sont deux primitives de f sur $[a,b]$ alors elles diffèrent d'une constante réelle.
Soit F et ϕ deux primitives de f sur $[a,b]$.
Pour tout $x \in [a,b]$,
$\phi'(x) = \ldots\ldots$ et $F'(x) = \ldots\ldots$ donc par différence $\phi'(x) - F'(x) = \ldots\ldots$ puis par linéarité de l'opérateur de dérivation, $(\phi - F)'(x) = \ldots\ldots$ donc $\phi - F$ est une primitive de $\ldots\ldots$ sur $[a,b]$ ainsi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour $x \in [a,b]$, $(\phi - F)(x) = \ldots\ldots \Leftrightarrow \phi(x) - F(x) = \ldots\ldots \Leftrightarrow \phi(x) = F(x) + \ldots\ldots.$

Propriété 3 – Expression d'une intégrale avec une primitive

Si f est continue et positive sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a,b]$.

Démonstration

$\triangleright$ $\phi(a) = F(a) + \lambda = 0 + \lambda = \lambda$ donc pour tout $x \in [a,b]$,

$$\phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$\triangleright$ $b \in [a,b]$ donc $\phi(b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt + \ldots\ldots\ldots$ donc $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\triangleright$ $\phi(b) - \phi(a) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
On a donc

$$\int_a^b f(t)\,dt = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemples :

1) $\displaystyle\int_0^1 x^2 + 1\,dx =$

2) $\displaystyle\int_2^3 \sqrt{x}\,dx =$

3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx =$

3. Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

Propriété 4 – Primitives de fonctions continues sur un intervalle I

Si f est continue de signe quelconque sur $[a, b]$ alors f admet des primitives sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Démonstration

▷ Cas où I est un segment $[a, b]$:

f est continue sur $[a, b]$ donc elle admet un minimum m.
▷ Si $m \geq 0$ alors f est continue et positive sur $[a, b]$ donc d'après le paragraphe précédent elle admet des primitives sur $[a, b]$.
▷ Si $m < 0$ alors on pose $g : x \mapsto f(x) - m$ définie sur $[a, b]$
g est continue et positive sur $[a, b]$ donc elle admet des primitives sur $[a, b]$. Si G est une primitive de g sur $[a, b]$, on a pour tout $x \in [a, b]$ $F(x) = G(x) + mx$ et $F'(x) = G'(x) + m = f(x)$ donc F est une primitive de f sur $[a, b]$.
▷ Les autres cas d'intervalles ne sont pas abordés en terminale.

⚠ Il existe des fonctions discontinues sur $[a, b]$ et qui admettent des primitives sur I.

Définition 3 – Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle I

f est une fonction continue sur un intervalle I et F est une primitive de f sur I. a et b sont deux nombres quelconques de I. L'intégrale de f entre a et b est :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

On écrira $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemples :

1) $\int_{-1}^{2} -3x dx =$

2) $\int_{1}^{-1} t^2 dt =$

3) $\int_{0}^{\pi} \cos\theta d\theta =$

4. Propriétés

Propriété 5 – Relation de Chasles

f est continue sur I et $a, b, c \in$ I.

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Démonstration

Comme f est continue sur I alors les intégrales existent et

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx &= [F(x)]_a^b + [F(x)]_b^c \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Propriété 6 – Linéarité de l'opérateur intégrale

f et g sont continues sur I, $a, b \in$ I, $k \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b (k \times f)(x)dx = k \times \int_a^b f(x)dx$$

Démonstration

f et g sont continues sur I donc les intégrales existent et :

$$\begin{aligned}\int_a^b (f+g)(x)dx &= (F+G)(b) - (F+G)(a) \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_a^b (k \times f)(x)dx &= (kF)(b) - (kF)(a) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Propriété 7 – Inversion des bornes

f est une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in I$.

▷ $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$

▷ $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Démonstration

f est continue sur I donc les intégrales existent et :

▷ $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = [F(x)]_a^a = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

▷ La relation de Chasles permet d'écrire :

$\displaystyle\int_a^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = \ldots\ldots \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Propriété 8 – Positivité de l'opérateur intégrale

f est continue sur I, $a, b \in$ I.

$$\begin{cases} f \geq 0 \\ a \leq b \end{cases} \text{ sur } [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

Démonstration

f est continue et positive sur I donc l'intégrale représente une aire et une aire est positive.

Propriété 9 – Croissance de l'opérateur intégrale

f et g sont continues sur I, $a, b \in$ I.

$$\begin{cases} f \geq g \\ a \leq b \end{cases} \text{ sur } [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

Démonstration

f et g sont continues sur I donc $f - g$ aussi et par positivité de l'opérateur intégrale, alors comme pour tout x dans I $f(x) - g(x) \geq \ldots\ldots$ alors $\displaystyle\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx \geq \ldots\ldots$

Par linéarité de l'opérateur intégrale, on a donc

$$\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx \geq 0 \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Propriété 10 – Encadrement d'une intégrale

f est une fonction continue sur $[a, b]$. Soit m et M deux réels tels que, pour tout $x \in [a, b]$,

$$m \leq f(x) \leq M$$

alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Démonstration

f est continue sur $[a, b]$ donc l'intégrale existe et comme pour tout $x \in [a, b]$, $m \leq f(x) \leq M$ alors d'après la croissance de l'opérateur intégrale on a :

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx \Leftrightarrow [mx]_a^b \leq \int_a^b f(x)dx \leq [Mx]_a^b$$

$$\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots \leq \int_a^b f(x)dx \leq \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots \leq \int_a^b f(x)dx \leq \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Définition 4 – Valeur moyenne d'une fonction sur $[a, b]$

f est continue sur $[a, b]$. La valeur moyenne de la fonction f sur $[a, b]$ est le réel

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Moyenne en statistique : $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \times n_i$

Moyenne d'une fonction : $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Application pour le calcul de la vitesse moyenne entre deux temps t_2 et t_1 :

$$V_{\text{moyenne}} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = \frac{D(t_2) - D(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Application pour le calcul de l'accélération moyenne entre deux temps t_2 et t_1 :

$$A_{\text{moyenne}} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} a(t)dt = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$

5. Méthodes de calcul des intégrales

5.1. Avec les primitives

Méthode 1 – Calcul direct d'intégrales.

Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ alors elle admet des primitives et on note F l'une d'entre elles, alors

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemple :

Calculons $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2x+5}}dx$

$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2x+5}}$ est définie et continue sur $[0;2]$.

On pose $u(x) = 2x+5$ alors u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = \ldots\ldots$

De plus $\dfrac{1}{\sqrt{2x+5}} = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ de primitive $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

On a donc

$\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2x+5}}dx =$

5.2. Avec une ou des intégrations par parties

Propriété 11 – Intégration par parties

Si f et g sont deux fonctions définies sur $[a,b]$, dérivables et donc continues sur $[a,b]$ telles que f' et g' sont continues sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Démonstration

f, g, f' et g' sont continues sur $[a,b]$ donc $f'g$ et fg' aussi et les intégrales existent.

D'après la formule de dérivation d'un produit, pour tout $x \in [a,b]$:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

donc par linéarité de l'opérateur intégrale, on peut écrire que

$\displaystyle\int_a^b (fg)'(x)dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$

$\Leftrightarrow$

Méthode 2 – Choix des fonctions dans une intégration par parties

▷ Si l'une des deux fonctions dans l'intégrale est un polynôme alors il faut dériver ce polynôme et on choisira g pour ce polynôme.
Par exemple : $\int xe^x dx$

▷ Si on ne connaît pas les primitives d'une des deux fonctions alors il faut dériver cette fonction et on choisira g pour cette fonction.
Par exemple : $\int x \ln x dx$

Exemples :

1) Calculons $I = \int_0^1 xe^x dx$

Soient les fonctions f, f', g, g' définies et continues sur $[0;1]$

$$f'(x) = \ldots\ldots \qquad f(x) = \ldots\ldots$$
$$g(x) = \ldots\ldots \qquad g'(x) = \ldots\ldots$$

En intégrant par parties on obtient :

$\int_0^1 xe^x dx = [\ldots\ldots\ldots\ldots]_0^1 - \int_0^1 \ldots\ldots\ldots\ldots dx =$

En fait on obtient les deux résultats ci-dessous :

▷ Une primitive de $x \mapsto xe^x$ est $x \mapsto \ldots\ldots\ldots\ldots$

▷ $I = \int_0^1 xe^x dx = \ldots\ldots$

2) Calculons $I = \int_1^e \ln x dx$

Soient les fonctions f, f', g, g' définies et continues sur $[1;e]$

$$f'(x) = \ldots\ldots \qquad f(x) = \ldots\ldots$$
$$g(x) = \ldots\ldots \qquad g'(x) = \ldots\ldots$$

En intégrant par parties on obtient :

$\int_1^e \ln x dx =$

En fait on obtient les deux résultats ci-dessous :
▷ Une primitive de $x \mapsto \ln x$ est $x \mapsto$ .....
▷ $I = \int_1^e \ln x dx =$ .....

3) Calculons $I = \int_0^\pi x \cos x dx$

Soient les fonctions f, f', g, g' définies et continues sur $[0;\pi]$

$f'(x) =$ ..... $f(x) =$ .....
$g(x) =$ ..... $g'(x) =$ .....

En intégrant par parties on obtient :
$\int_0^\pi x \cos x dx$

4) Calculons $I = \int_0^\pi e^x \sin x dx$

Soient les fonctions f, f', g, g' définies et continue sur $[0;\pi]$

$f'(x) =$ ..... $f(x) =$ .....
$g(x) =$ ..... $g'(x) =$ .....

En intégrant par parties on obtient :
$I = \int_0^\pi e^x \sin x dx$

Or nous ne pouvons pas calculer directement $\int_0^\pi e^x \cos x dx$, nous allons faire une deuxième intégration par parties.
Soient les fonctions f, f', g, g' définies et continues sur $[0;\pi]$

$f'(x) =$ ..... $f(x) =$ .....
$g(x) =$ ..... $g'(x) =$ .....

En intégrant par parties on obtient :
$I = \int_0^\pi e^x \sin x dx$

Finalement on obtient que

$$I = \left[e^x \sin x - e^x \cos x\right]_0^{\pi} - I$$

et donc $2I = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
On obtient les deux résultats ci-dessous :
▷ Une primitive de $x \mapsto e^x \sin x$ est $x \mapsto \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
▷ $I = \displaystyle\int_0^{\pi} e^x\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

6. Applications

6.1. Calcul de primitives

On souhaite calculer une primitive de $h : x \mapsto (x-2)e^x$
On va calculer $\displaystyle\int (x-2)e^x\,dx$ sans mettre de borne et dans les crochets on obtiendra une primitive.
Soient les fonctions f, f', g, g' définies et continues sur $[0;1]$

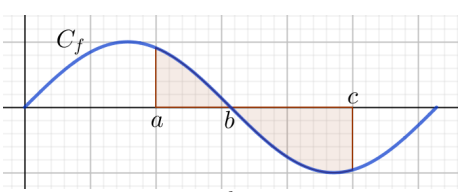
$$f'(x) = \ldots\ldots \qquad f(x) = \ldots\ldots$$
$$g(x) = \ldots\ldots \qquad g'(x) = \ldots\ldots$$

En intégrant par parties on obtient : $\displaystyle\int (x-2)e^x\,dx$

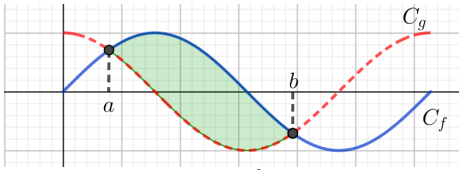
donc une primitive de h est $H : x \mapsto \ldots\ldots\ldots\ldots$

6.2. Calcul d'aires

1) **Aire entre deux courbes.**



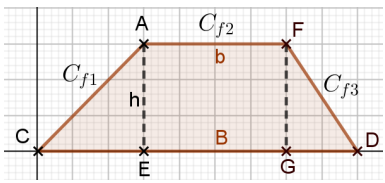
Aire coloriée : $A = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$



Aire coloriée : $A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$

2) **Aire d'une figure géométrique.**

Déterminons la formule de l'aire d'un trapèze :



$C(0;0)$, $A(a,h)$, $F(a+b;h)$ et $D(B;0)$

$f_1(x) = \dfrac{h}{a}x$, $f_2(x) = h$ et $f_3(x) = -\dfrac{h}{B-a-b}x + \dfrac{hB}{B-a-b}$

Les trois fonctions sont continues et positives respectivement sur $[0;a]$, $[a,a+b]$ et $[a+b,B]$ donc on peut calculer l'aire sous la courbe formée des trois segments.

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^a f_1(x)dx + \int_a^{a+b} f_2(x)dx + \int_{a+b}^B f_3(x)dx \\
&= \int_0^a \frac{h}{a}xdx + \int_a^{a+b} hdx + \int_{a+b}^B \left(-\frac{h}{B-a-b}x + \frac{hB}{B-a-b}\right)dx \\
&= \left[\frac{h}{2a}x^2\right]_0^a + [hx]_a^{a+b} + \left[-\frac{h}{2(B-a-b)}x^2 + \frac{hB}{B-a-b}x\right]_{a+b}^B \\
&= \frac{ha^2}{2a} + hb - \frac{h}{2(B-a-b)}B^2 + \frac{hB}{B-a-b}B + \frac{h}{2(B-a-b)}(a+b)^2 - \frac{hB}{B-a-b}(a+b) \\
&= \frac{ha}{2} + hb + \frac{-hB^2 + 2hB^2 + h(a+b)^2 - 2hB(a+b)}{2(B-a-b)} \\
&= \frac{ha}{2} + hb + \frac{h(B^2 - 2aB - 2bB + 2ab + a^2 + b^2)}{2(B-a-b)} \\
&= \frac{ha}{2} + hb + \frac{h(B-a-b)^2}{2(B-a-b)} = \frac{ha}{2} + hb + \frac{h(B-a-b)}{2} \\
&= \frac{ha + 2hb + hB - ha - hb}{2} = \frac{ha + 2hb + hB - ha - hb}{2} \\
&= \frac{h(B+b)}{2}
\end{aligned}$$

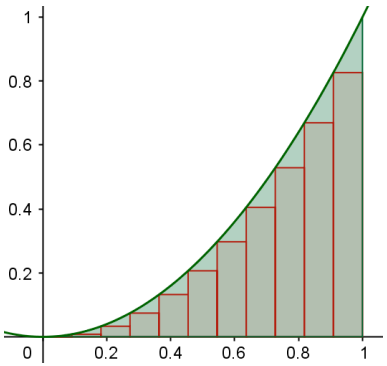
On retrouve la formule de l'aire d'un trapèze :

$$A = \frac{\text{Hauteur} \times (\text{Gde Base} + \text{petite base})}{2}$$

7. Approximation d'une intégrale

7.1. Méthode d'approximation d'intégrales : Méthode des rectangles

On souhaite trouver une approximation de $\int_a^b f(x)dx$ lorsqu'on ne connait pas de primitive de f et que l'on ne peut pas faire d'intégration par parties.
La méthode des rectangles est celle qui est expliquée en introduction.



On découpe le segment $[a,b]$ en segments $[x_0;x_1]$, $[x_1;x_2]$, ..., $[x_{n-1};x_n]$ de même longueur $\frac{b-a}{n}$ et on sait que

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \times \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

Exemple de calcul approché de $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$:

```
from  math import*
def f(x):
    return 1/(1+x*x);

def Rectangle(a,b,n):
    S=0;
    for i in range(n):
        x=a+i*(b-a)/n;
        S=S+f(x);
    S=((b-a)/n)*S;
    return S;

```

Résultats obtenus

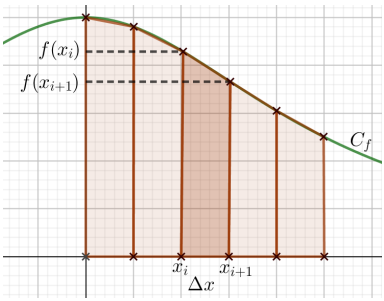
```
Rectangle(0,1,100)
0.7878939967307822

```

```
Rectangle(0,1,1000)
0.7856481217307811
```

7.2. Méthode d'approximation d'intégrales : Méthode des trapèzes

On souhaite trouver une approximation de $\int_a^b f(x)dx$ lorsqu'on ne connait pas de primitive de f et que l'on ne peut pas faire d'intégration par parties.
La méthode des trapèzes est une méthode identique à celle des rectangles mais au lieu d'approcher l'aire sous la courbe par des aires de rectangles, on utilise des trapèzes.



On découpe le segment $[a,b]$ en segments $[x_0;x_1]$, $[x_1;x_2]$, ..., $[x_{n-1};x_n]$ de même longueur $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ et on sait que

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(f(x_i)+f(x_{i+1})\Delta x}{2} = \sum_{i=0}^{n-1}(f(x_i+f(x_{i+1}))\times\frac{b-a}{2n} = \frac{b-a}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_i)+f(x_{i+1}))$$

Exemple de calcul approché de $\int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2}dx$:

```
from  math import*
def f(x):
    return 1/(1+x*x);

def Trapeze(a,b,n):
    S=0;
    for i in range(n):
        x=a+i*(b-a)/n;
        y=a+(i+1)*(b-a)/n;
        S=S+f(x)+f(y);
    S=((b-a)/(2*n))*S;
    return S;
```

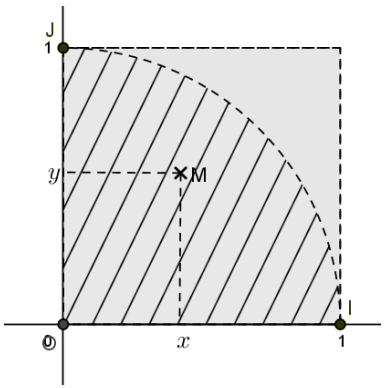
Résultats obtenus

```
Trapeze(0,1,100)
0.7853939967307827

Trapeze(0,1,1000)
0.785398121730783
```

7.3. Méthode d'approximation d'intégrales : Méthode de Monte Carlo

On souhaite trouver une approximation de $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ car on ne connait pas de primitive de $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ et que l'on ne peut pas faire d'intégration par parties.
On lance des fléchettes sur une cible carrée et on répète cette expérience un grand nombre de fois n. On relève le nombre de fléchettes qui se trouvent dans le quart de disque (schématisé ci-dessous) et le nombre de fléchettes lancées. Si on lance un grand nombre de fléchettes alors le rapport du nombre de fléchettes dans le quart de disque sur le nombre de fléchettes lancées se rapproche du rapport entre l'aire du quart de disque sur l'aire du carré.



$Aire_D = \frac{1}{4} \times \pi \times R^2 = \frac{\pi}{4}$ ua
$Aire_{carré} = côté^2 = 1 \times 1 = 1$ ua
donc le rapport de l'aire de D sur l'aire du carré est :

$$\frac{\pi}{4}$$

Pour que M soit dans D, il faut et il suffit que $x \in [0;1]$, $y \in [0;1]$ et $OM \leq 1$

Les trois conditions pour que M soit dans D sont donc :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ \sqrt{x^2+y^2} \leq 1 \end{cases}$$

Simulation des lancers et approximation de l'intégrale
Comme $\frac{\text{Nbre de fléchettes}}{n}$ va se rapprocher du rapport de l'aire de D sur l'aire du carré, alors $4 \times \frac{\text{Nbre de fléchettes}}{n}$ va se rapprocher de $4 \times \frac{\pi}{4}$ et donc de la valeur de π.

Ce qui veut dire qu'en lançant des fléchettes on va trouver la valeur de π.
Programme et test avec Python

```python

from math import *
from random import*

def MonteCarlo(n):
    NbreFlechette=0
    for i in range (1,n+1):
        x=random()
        y=random()
        if sqrt(x**2+y**2)<=1:
            NbreFlechette=NbreFlechette+1
    return 4*NbreFlechette/n
```

Résultats obtenus

```python
MonteCarlo(100)
3.04

MonteCarlo(1000)
3.1

MonteCarlo(10000)
3.1128

MonteCarlo(100000)
3.14252

MonteCarlo(1000000)
3.139868

MonteCarlo(10000000)
3.1413168

pi
3.141592653589793
```