CHAPITRE 5

LES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Le mot trigone apparaît au XIVe siècle. Il est formé de la racine grecque « *gonia* » qui désigne un angle. C'est l'allemand Pittiscus en 1595 qui utilise le mot trigonometria, formé de « *gonia* » (angle) et de « métron » (mesurer) .
Il faut remonter jusqu'aux babyloniens, 2000 ans avant notre ère, pour trouver les premières traces de tables de données astronomiques. Car à la base, la trigonométrie est une géométrie indissociable de l'astronomie.
Eratosthène de Cyrène et Aristarque de Samos utilisaient ces tables pour l'astronomie. Eratosthène se rendra célèbre pour avoir calculé la circonférence de la Terre avec une précision tout à fait remarquable.
Mais on attribue à Hipparque de Nicée les premières tables trigonométriques. Elles font correspondre l'angle au centre et la longueur de la corde interceptée dans le cercle.

Les contenus du chapitre

▷ Fontions trigonométriques sinus et cosinus. Dérivées, variations, courbes représentatives.

Les capacités attendues du chapitre

▷ Résoudre une équation du type $\cos x = a$, une équation de la forme $\cos x \leq a$ sur $]-\pi;\pi]$.

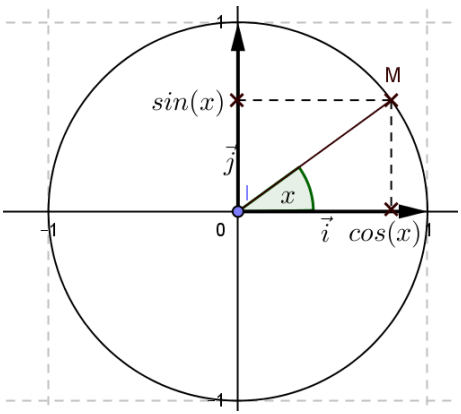
▷ Dans le cadre de la résolution de problème, notamment géométrique, étudier une fonction simple définie à partir de fonctions trigonométriques, pour déterminer des variations, un optimum.

Cours

1. Définitions et notations

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. À tout réel x, on associe un unique point M sur le cercle trigonométrique. Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ le point M a pour coordonnées :

$$M(\cos x; \sin x)$$



Définition 1 – Fonctions cosinus et sinus

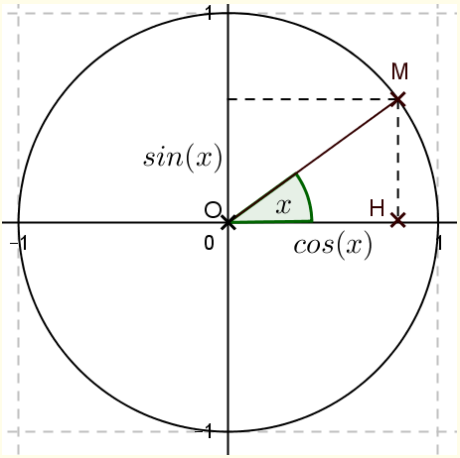
▷ La fonction qui à tout réel x, associe le nombre $\cos x$ est appelée la fonction cosinus : $\cos : x \mapsto \cos x$.
▷ La fonction qui à tout réel x, associe le nombre $\sin x$ est appelée la fonction sinus : $\sin : x \mapsto \sin x$.

Propriété 1 – Propriétés du cosinus et du sinus

▷ Dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ alors M a pour coordonnées $(\cos(x); \sin(x))$.
▷ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = \ldots\ldots$.
▷ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cdots\cdots \leq \cos(x) \leq \ldots\ldots$ et $\ldots\ldots \leq \sin(x) \leq \ldots\ldots$.

Démonstration

▷ Le point M a pour coordonnées $(\cos(x); \sin(x))$ par définition des fonctions cos et sin.
▷ Cette propriété vient du théorème de Pythagore dans le triangle OMH rectangle en H.



D'après le théorème de Pythagore :

$$OM^2 = OH^2 + MH^2 \Leftrightarrow 1^2 = \cos^2 x + \sin^2 x$$

▷ la troisième propriété vient du fait que sur le cercle trigonométrique, les points ont des abscisses et des ordonnées dans $[-1;1]$.

Propriété 2 – Quelques points à connaître

α (rd)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(\alpha)$	.....	.....	.....	.....	.....	.....
$\sin(\alpha)$	.....	.....	.....	.....	.....	.....

Démonstration

Toutes ces propriétés sont démontrées en première.

Propriété 3 – Formulaire de trigonométrie

On note a et b deux réels.
▷ Formules des angles associés :

$$\cos(a+2\pi) = \ldots\ldots \qquad \sin(a+2\pi) = \ldots\ldots \qquad \cos(-a) = \ldots\ldots$$
$$\sin(-a) = \ldots\ldots \qquad \cos(\pi - a) = \ldots\ldots \qquad \sin(\pi - a) = \ldots\ldots$$
$$\cos(\pi + a) = \ldots\ldots \qquad \sin(\pi + a) = \ldots\ldots \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \ldots\ldots$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \ldots\ldots \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \ldots\ldots \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \ldots\ldots$$

▷ Formules d'addition :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \qquad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

▷ Formules de duplication :

$$\cos(2a) = \cos^a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$$
$$\sin(2a) = 2\cos a \sin a$$

▷ Formules de linéarisation :

$$\cos^2 a = \frac{1}{2}(\cos(2a) + 1) \qquad \sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos(2a))$$

Démonstration

Nous allons seulement démontrer les formules d'addition, de duplication et de linéarisation car les autres ont été démontrées en première.

▷ Formules d'addition :
On note M et N deux points du cercle trigonométrique avec $M(\cos b; \sin b)$ et $N(\cos a; \sin a)$. $(a > b)$
Calculons $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}$ de deux façons différentes :
$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = \|\overrightarrow{OM}\| \times \|\overrightarrow{ON}\| \cos(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{ON}) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = xx' + yy' = \ldots\ldots\ldots\ldots$
On a donc

$$\cos(b-a) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si on remplace b par $-b$, on obtient :

$$\cos(a+b) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si on remplace b par $-b$, on obtient :

$$\cos(a+b) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si on remplace, dans l'égalité précédente, a par $\frac{\pi}{2} - a$ alors :
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a + b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin b$ et on obtient :

$$\sin(a-b) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Enfin en remplaçant b par $-b$, on obtient :

$$\sin(a+b) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

▷ Formules de duplication :
On utilise les formules d'addition en utilisant $a = b$:

$$\cos(2a) = \cos(a+a) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

On utilise le fait que $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ et donc $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$ et $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$
alors $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = (1 - \sin^2 a) - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a$
et $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1$

▷ Formules de linéarisation :

$$\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a \Leftrightarrow 2\sin^2 a = 1 - \cos(2a) \Leftrightarrow \sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos(2a))$$

$$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 \Leftrightarrow 2\cos^2 a = \cos(2a) + 1 \Leftrightarrow \cos^2 a = \frac{1}{2}(\cos(2a) + 1)$$

Exemples :

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) =$

$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

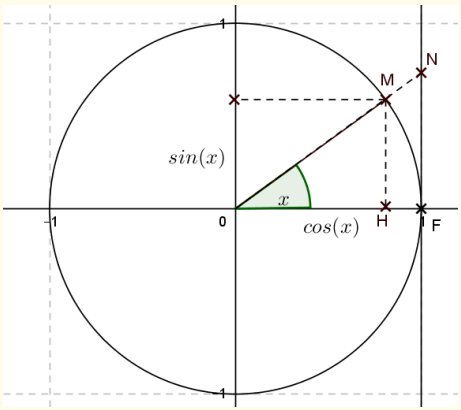
2. Limites

Propriété 4 – Croissance comparée

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

Démonstration

On note $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, alors $0 < \cos x < 1$.



Aire du triangle OMH : $A_1 = \frac{1}{2}\cos x \sin x$
Longueur NF :
D'après le théorème de Thalès : $\frac{\cos x}{1} = \frac{\sin x}{NF} \Leftrightarrow NF = \ldots\ldots\ldots\ldots$
Aire du triangle NFO : $A_2 = \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}$
Aire du secteur angulaire OMF : $A = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
or $A_1 \leq A \leq A_2$ donc on obtient :

$$\cos x \sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \cos x \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

et donc par inverse, comme la fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty($,

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x} \leq 1 \Leftrightarrow \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

or $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \ldots\ldots$ donc par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \ldots\ldots$
Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2};0\right[\cup \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$,
$\frac{\sin x}{x} \times \frac{-\sin x}{1+\cos x} = -\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} =$

donc

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\ldots\ldots\\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{1+\cos x}=\ldots\ldots\end{array}\right\}\text{donc par quotient }\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\ldots\ldots$$

3. Dérivation et variations

Propriété 5 – Dérivation des fonctions trigonométriques

Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pout tout $x\in\mathbb{R}$

$$\cos'(x)=-\sin x$$
$$\sin'(x)=\cos x$$
$$\cos'(u(x))=-u'(x)\times sin(u(x))$$
$$\sin'(u(x))=u'(x)\times cos(u(x))$$

Démonstration

On note $h\in\mathbb{R}$ e $h\neq 0$

$$\cos(x+h)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\cos x\times\lim_{x\to 0}\frac{\cos h-1}{h}-\lim_{x\to 0}\sin x\frac{\sin h}{h}$$

or $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos h-1}{h}=\ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin h}{h}=\ldots\ldots$ donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\ldots\ldots\ldots$$

cos est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\cos'(x)=\ldots\ldots\ldots$

$$\sin(x+h)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\sin x\times\lim_{x\to 0}\frac{\cos h-1}{h}-\lim_{x\to 0}\cos x\frac{\sin h}{h}$$

or $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos h-1}{h}=\ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin h}{h}=\ldots\ldots$ donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\ldots\ldots$$

sin est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin'(x)=\ldots\ldots.$

Pour $\cos'(u(x))=-u'(x)\times\sin(u(x))$ et $\sin'(u(x))=u'(x)\times cos(u(x))$ il suffit d'appliquer la formule de dérivation des fonctions composées.

Propriété 6 – Variations

x	0		π
$cos'(x) = -\sin x$	0	$-$	0
cos	1	$\searrow$	-1

x	0		$\pi/2$		π
$sin'(x) = \cos x$		$-$	0	$-$	
sin	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

4. Propriétés des fonctions trigonométriques

Propriété 7 – Parité

▷ La fonction cos est paire et la fonction sin est impaire.
▷ La courbe de la fonction cos est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
▷ La courbe de la fonction sin est donc symétrique par rapport à l'origine du repère $O(0;0)$.

Démonstration

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(-x) = \cos x \text{ et } \sin(-x) = -\sin x$$

Propriété 8 – Périodicité

Les fonctions cos et sin sont toutes les deux périodiques de période 2π.

Démonstration

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + 2\pi \in \mathbb{R}$,

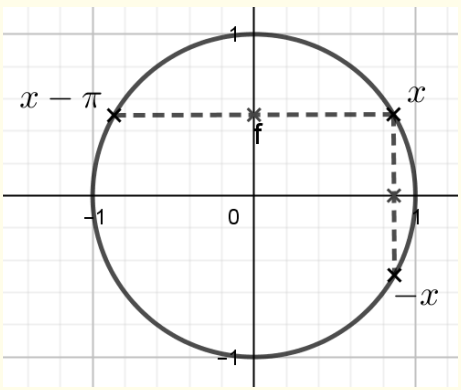
$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \text{ et } \sin(x + 2\pi) = \sin x$$

Propriété 9 – Equations

Si $x \in]-\pi;\pi]$,
▷ $\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = a$ ou $x = -a$
▷ $\sin x = \sin a \Leftrightarrow x = a$ ou $x = \pi - a$

Démonstration

Cela vient du fait que $\cos x = \cos(-x)$ et que $\sin x = \sin(\pi - x)$:



Méthode 1 – Equations et inéquations trigonométriques

Exemples :

▷ $\cos x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ donc $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = -\frac{\pi}{4}$

Sur $]-\pi;\pi]$, $S = \left\{-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right\}$

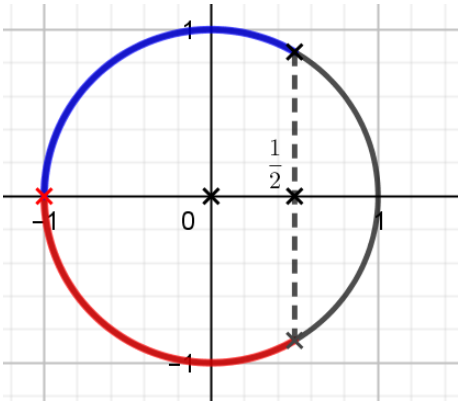
▷ $2\sin x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

donc $x = -\frac{\pi}{4}$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$

Sur $]-\pi;\pi]$, $S = \left\{-\frac{3\pi}{4};-\frac{3\pi}{4}\right\}$

▷ $\cos x \leq \frac{1}{2}$

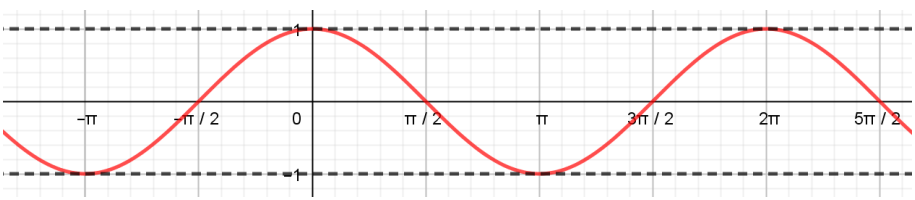
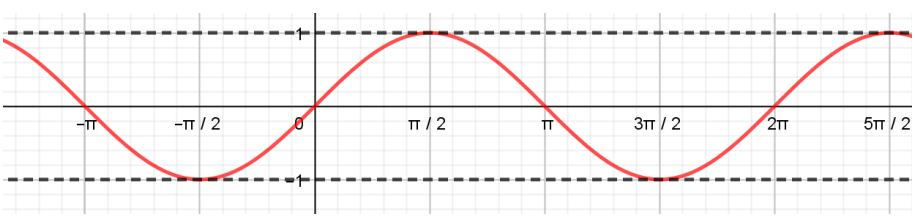
A l'aide de la représentation sur le cercle



on obtient que $S = \left]-\pi; -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$

5. Courbe représentative

▷ Courbe de la fonction cos :



▷ Courbe de la fonction sin :