Chapitre 4

Le logarithme népérien

Les calculs nécessaires à l'astronomie sont très complexes et l'objectif de la création de la fonction logarithme a été de simplifier ces calculs. John Neper (1550-1617) a inventé les logarithmes avec la particularité de transformer les produits en sommes. La simplification est telle que cette découverte se propage à grande vitesse. Il définit le logarithme comme le rapport de la distance à parcourir de deux mobiles, l'un se déplaçant à vitesse constante et l'autre à vitesse proportionnelle à la distance restant à parcourir. Vers 1625, Briggs introduit le logarithme en base 10 que l'on nomme le logarithme décimal.

Les contenus du chapitre

▷ Fonction logarithme népérien, notée ln, construite comme réciproque de la fonction exponentielle.

▷ Propriétés algébriques du logarithme.

▷ Fonction dérivée du logarithme et variations.

▷ Limite en 0 et en $+\infty$, courbe représentative. Lien entre courbes représentatives des fonctions logarithmes et exponentielles.

▷ Croissance comparée du logarithme népérien et de $x \mapsto x^n$, en 0 et en $+\infty$.

Les capacités attendues du chapitre

▷ Utiliser l'équation fonctionnelle de l'exponentielle ou du logarithme pour transformer une écriture, résoudre des équations et des inéquations.

▷ Dans le cadre d'une résolution de problème, utiliser les propriétés des fonctions exponentielles et logarithmes.

Cours

1. Définitions et notations

Pour tout $y \in]0;+\infty[$, quel est le nombre de solutions de l'équation $e^x = y$?
On note $f : x \mapsto e^x$ définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$.
▷ f est donc continue sur $\mathbb{R}$.
▷ $f'(x) = e^x > 0$ donc f est strictement croissante donc strictement monotone sur $\mathbb{R}$.
▷ $f(]-\infty;+\infty[) =]0;+\infty[$.
Pour tout $y \in]0;+\infty[$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution à l'équation $e^x = y$. On nomme $\ln y$ cette solution et on lit : logarithme népérien de y.

Définition 1 – Logarithme népérien de x

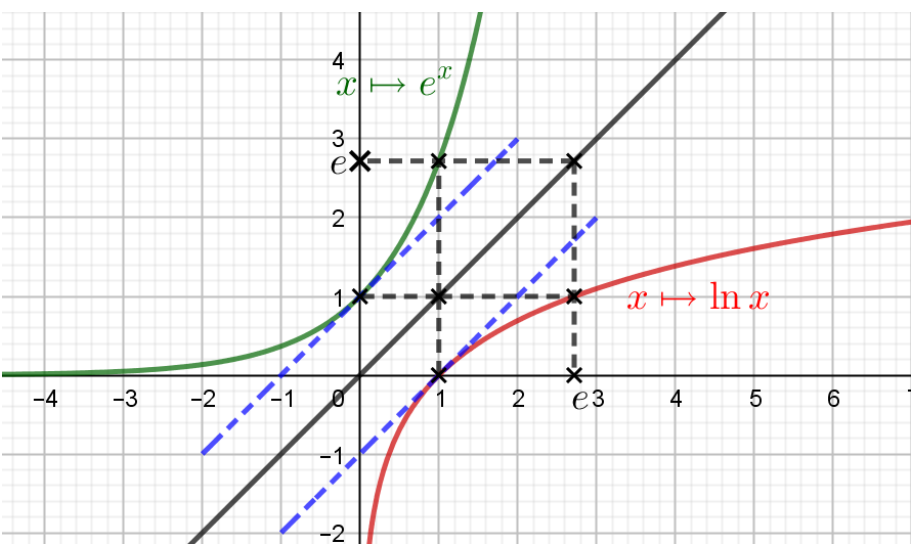
Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\ln x$ est l'unique nombre dont l'exponentielle vaut $e^{\ln x} =$ .....

Définition 2 – Fonction logarithme népérien

Le fonction logarithme népérien est la fonction réciproque de la fonction exponentielle. Elle est donc définie sur $]0;+\infty[$ et à tout $x \in]0;+\infty[$ elle lui associe le nombre réel noté $\ln x$ tel que $e^{\ln x} = x$.

$$\ln : x \mapsto \ln x$$

Pour obtenir la courbe de la fonction logarithme, il est nécessaire de faire la symétrie de la courbe de la fonction exponentielle, par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Propriété 1 – Propriétés de la fonction ln

Conséquences de la construction ci-avant :
▷ $D_f = \ldots\ldots\ldots\ldots$
▷ Pour tout $x > 0$, $e^{\ln x} = \ldots\ldots$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln\left(e^x\right) = \ldots\ldots$
▷ $\ln 1 = \ldots\ldots$ et $\ln e = \ldots\ldots$
▷ Pour tout $x > 0$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $y = \ln x \Leftrightarrow x = \ldots\ldots\ldots$
▷ ln est dérivable en 1 et $\ln'(1) = \ldots\ldots$
▷ L'équation réduite de la tangente à la courbe du logarithme népérien, au point d'abscisse 1, est $y = \ldots\ldots\ldots$

Exemples :

▷ $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ldots\ldots\ldots$
▷ $\ln x = 5 \Leftrightarrow x = \ldots\ldots\ldots$

2. Propriétés du logarithme

Propriété 2 – propriétés algébriques

a et b sont deux réels strictement positifs :
▷ $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$
▷ $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
▷ $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$
▷ Pour tout $n \in \mathbb{R}$, $\ln\left(a^n\right) = n \times \ln a$
▷ $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2} \times \ln a$

Démonstration

Pour tout $a, b \in]0; +\infty[$

▷ $e^{\ln(a\times b)} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

et $e^{\ln a + \ln b} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

donc $e^{\ldots\ldots\ldots\ldots} = e^{\ldots\ldots\ldots\ldots} \Leftrightarrow \ln(a \times b) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

▷ $e^{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} = \ldots\ldots$

et $e^{\ln a - \ln b} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

donc $e^{\ldots\ldots\ldots\ldots} = e^{\ldots\ldots\ldots\ldots} \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

▷ $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

▷ Démonstration par récurrence sur n :
On note $\mathbf{P}_n$ la propriété : $\ln\left(a^n\right) = n \times \ln a$
Initialisation : (Pour $n = 0$)
$\ln\left(a^0\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et $0 \times \ln a = \ldots\ldots$ donc $\mathbf{P}_0$ est $\ldots\ldots$
Hérédité : on suppose que $\mathbf{P}_k$ est vraie pour un rang k, montrons que dans ce cas $\mathbf{P}_{k+1}$ l'est aussi.

$\ln\left(a^{k+1}\right) = \ln\left(a^k \times a\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

donc $\mathbf{P}_{k+1}$ est $\ldots\ldots$
Conclusion :
$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{P}_0 \text{ est vraie}\\ \mathbf{P}_k \text{ implique } \mathbf{P}_{k+1}\end{array}\right\} \text{donc pour tout } n \in \mathbb{N},\ \ln\left(a^n\right) = n \times \ln a$$

▷ $2\ln\left(\sqrt{a}\right) = \ln\left((\sqrt{a})^2\right) = \ln a \Leftrightarrow \ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2} \times \ln a$

Exemple :
▷ $\ln(6) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
▷ $\ln 15 - \ln 3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
▷ $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
▷ $\ln 8 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Propriété 3 – Dérivation

La fonction logarithme népérien $f : x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$:

▷ Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x}$.
▷ Pour tout x tel que $u(x) > 0$, $\left(f(u(x))\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Démonstration

Pour $h > 0$, on souhaite trouver $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ x>0}} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}$
▷ Si $Y = \ln(x+h)$ alors $x + h = \ldots\ldots\ldots$

▷ Si $y = \ln x$ alors $x = \ldots\ldots\ldots$

$$\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{\ln\left(e^Y\right) - \ln\left(e^y\right)}{e^Y - e^y} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

De plus lorsque h tend vers 0 alors Y tend vers y, donc

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ x>0}} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

▷ D'après le chapitre précédent sur la dérivation,

$$(f(u(x))' = u'(x) f'(u(x)) = u'(x) \times \frac{1}{u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Exemples :

▷ $f : x \mapsto x \ln x - x$

f est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$

On pose $u(x) = x$ et $v(x) = \ln x$

alors $u'(x) = \ldots\ldots$ et $v'(x) = \ldots\ldots$ donc

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

▷ $f : x \mapsto \ln(x^2 + 3)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 3 > 0$ donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On pose $u(x) = x^2 + 3$ alors $u'(x) = \ldots\ldots\ldots$ et donc

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Propriété 4 – Equations et inéquations

D'après les variations de la fonction $f : x \mapsto \ln x$, on peut en déduire :

▷ La fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty($.

x	0	$+\infty$
$f'(t)$	‖	$+$
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

Si $a > 0$ et $b > 0$,

▷ $\ln a < \ln b \Leftrightarrow \ldots\ldots < \ldots\ldots$

▷ $\ln a = \ln b \Leftrightarrow \ldots\ldots = \ldots\ldots$

▷ $\ln a > 0 \Leftrightarrow \ldots\ldots > \ldots\ldots$

▷ $\ln a < 0 \Leftrightarrow \ldots\ldots < a < \ldots\ldots$

x	0		1		$+\infty$
f	‖	……	0	……	

Démonstration

f est définie et dérivable sur $]0;+\infty($ et $f'(x) = \ldots\ldots\ldots > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0;+\infty($.
Si $a > 0$ et $b > 0$:
La fonction $g : x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
▷ $\ln a < \ln b \Leftrightarrow e^{\cdots\cdots} < e^{\cdots\cdots} \Leftrightarrow \ldots\ldots < \ldots\ldots$
▷ $\ln a = \ln b \Leftrightarrow e^{\cdots\cdots} = e^{\cdots\cdots} \Leftrightarrow \ldots\ldots = \ldots\ldots$
▷ $\ln a > 0 \Leftrightarrow e^{\cdots\cdots} > e^{\cdots\cdots} \Leftrightarrow \ldots\ldots > \ldots\ldots$
▷ $\ln a < 0 \Leftrightarrow e^{\cdots\cdots} < e^{\cdots\cdots} \Leftrightarrow a < \ldots\ldots \Leftrightarrow \ldots\ldots < a < \ldots\ldots$

Exemples :
▷ Pour $x > 0$, $\ln x < 5 \Leftrightarrow \ln x < \ln(\ldots\ldots\ldots) \Leftrightarrow x < \ldots\ldots\ldots$

▷ Pour $1 < x < 2$, $\ln(x-1) > \ln(2-x) \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

▷ Déterminer les valeurs de n pour que $1 - 0,85^n > 0,22$

$1 - 0,85^n > 0,22 \Leftrightarrow$

Propriété 5 – Limites

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$$

Démonstration

▷ Pour tout $A > 0$ dès que $x > e^A$ alors $\ln x \in]\ldots\ldots;\ldots\ldots[$ donc par définition $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = \ldots\ldots\ldots$

▷ En posant $x = \dfrac{1}{X}$:

$\lim\limits_{x\to 0} \ln x = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(\dfrac{1}{X}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$

Propriété 6 – Croissances comparées

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0} x^n \ln x = 0$$

Démonstration

On sait que $\lim\limits_{n\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

On pose $e^x = y$ alors

▷ $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln y}{y^n} =$

▷ $\lim\limits_{x\to 0} x^n \ln x =$

Exemples :

▷ $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 - \ln x = \lim\limits_{x\to +\infty} x^2\left(1 - \dfrac{\ln x}{x^2}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = \ldots\ldots \\ \lim\limits_{x\to +\infty} 1 - \dfrac{\ln x}{x^2} = \ldots\ldots \end{array}\right\} \text{donc par produit } \lim_{x\to +\infty} x^2 - \ln x = \ldots\ldots$$

▷ $\lim\limits_{x\to 0} (x^2 + x)\ln x = \lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln x + x \ln x$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln x = \ldots\ldots \\ \lim\limits_{x\to 0} x \ln x = \ldots\ldots \end{array}\right\} \text{donc par somme } \lim_{x\to 0} (x^2 + x)\ln x = \ldots\ldots$$

Propriété 7 – Limites taux d'accroissement

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

Démonstration

On note $f : x \mapsto \ln x$
f est dérivable en 1 donc :
▷ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x+1) - f(1)}{x} =$

▷ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} =$

3. Pour aller plus loin

Définition 3 – Exposants et réels

Pour tout $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $a^\alpha = e^{\alpha \ln a}$.

Exemples :

▷ $3^5 = \ldots\ldots\ldots$

▷ $5^{2,7} = \ldots\ldots\ldots$

Définition 4 – Logarithme décimal

La fonction logarithme décimal (utilisée en S.P.C et S.V.T) est la fonction log définie sur $]0; +\infty[$ par

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

Exemples :
▷ $\log 10 = \ldots\ldots$

$\log 100 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\log(10^n) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ pour $n \in \mathbb{Z}$.