CHAPITRE 3

LIMITES ET CONTINUITÉ DES FONCTIONS

Les travaux de Newton et Leibniz révèlent deux visions et deux pratiques différentes du calcul infinitésimal. La justification de telles méthodes nécessitait une mise au point de la notion de limite. Cauchy (1821-1823) définit précisément la notion de limite et en fait le point de départ de l'analyse. A travers le théorème des valeurs intermédiaires, l'étude de la continuité des fonctions permet de préciser les arguments assurant qu'une équation du type $f(x) = k$ admet des solutions.

Les contenus du chapitre

▷ Limite finie ou infinie d'une fonction en $+\infty$, en $-\infty$, en un point. Asymptote parallèle à un axe de coordonnées.

▷ Limites faisant intervenir les fonctions élémentaires étudiées en classe de première. Puissances entières, racine carrée et fonction exponentielle.

▷ Limite, opérations sur les limites et comparaison.

▷ Fonction continue en un point (définition par la limite), sur un intervalle. Toute fonction dérivable est continue.

▷ Image d'une suite convergente par une fonction continue.

▷ Théorème des valeurs intermédiaires. Cas des fonctions continues et strictement monotones.

Les capacités attendues du chapitre

▷ Déterminer dans des cas simples la limite d'une suite ou d'une fonction en un point, en $\pm\infty$, en utilisant les limites usuelles, les croissances comparées, les opérations sur les limites, des majorations, minorations ou encadrements, la factorisation du terme prépondérant dans une somme.

▷ Faire le lien entre l'existence d'une asymptote parallèle à un axe et celle de la limite correspondante.

▷ Etudier les solutions d'une équation du type $f(x) = k$: existence, unicité, encadrement.

▷ Pour une fonction continue f d'un intervalle dans lui-même, étudier une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Cours

1. Limite d'une fonction à l'infini

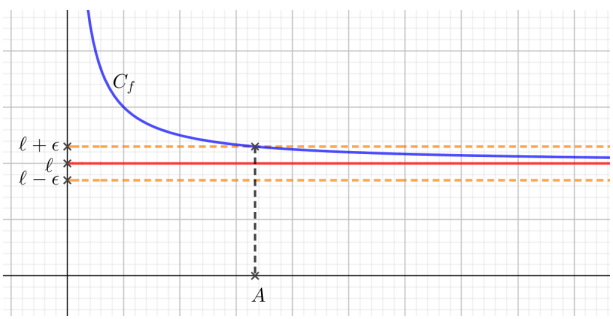
1.1. Limite finie

Définition 1 – Limite finie en $+\infty$

f est définie sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$ et $\ell \in \mathbb{R}$.
On dit que f admet une limite ℓ quand $x \to +\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les $f(x)$ dès que x est assez grand. On notera :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

Interprétation graphique :

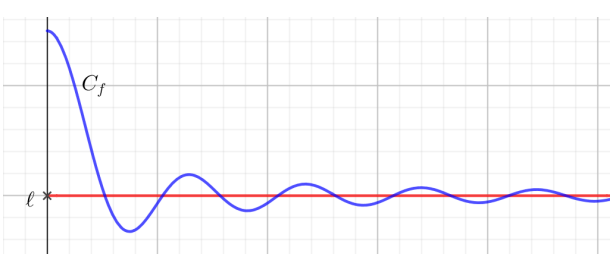


Traduction mathématique : $\forall \epsilon > 0, \exists A > 0$ tel que $\forall x > \ldots\ldots, f(x) \in]\ldots\ldots\ldots;\ldots\ldots\ldots[$

Définition 2 – Asymptote horizontale en $+\infty$

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ alors la droite horizontale d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale à la courbe C_f en $+\infty$.

Interprétation graphique :
La courbe de la fonction f se rapproche de plus en plus de la droite d'équation $y = \ell$ en $+\infty$.

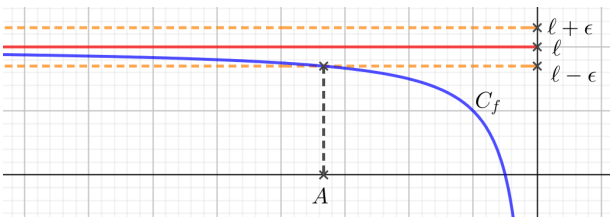


Définition 3 – Limite finie en $-\infty$

f est définie sur un intervalle de la forme $]-\infty; a[$ et $\ell \in \mathbb{R}$.
On dit que f admet une limite ℓ quand $x \to -\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les $f(x)$ dès que x est assez grand dans les négatifs.
On notera :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$$

Interprétation graphique :

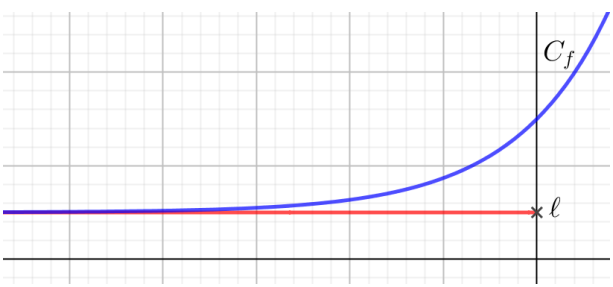


Traduction mathématique : $\forall \epsilon > 0, \exists A < 0$ tel que $\forall x < \ldots\ldots, f(x) \in]\ldots\ldots\ldots; \ldots\ldots\ldots[$

Définition 4 – Asymptote horizontale en $-\infty$

Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ alors la droite horizontale d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale à la courbe C_f en $-\infty$.

Interprétation graphique :
La courbe de la fonction f se rapproche de plus en plus de la droite d'équation $y = \ell$ en $-\infty$.



Propriété 1 – Limites des fonctions usuelles

On note $k \in \mathbb{N}^*$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \ldots\ldots$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = \ldots\ldots$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^k} = \ldots\ldots$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \ldots\ldots$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = \ldots\ldots$ $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \ldots\ldots$

Si k est impair, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^k} = \ldots\ldots$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \ldots\ldots$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = \ldots\ldots$

Si k est pair, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^k} = \ldots\ldots$ Si $k > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{kx}} = \ldots\ldots$

Si $k < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{kx} = \ldots\ldots$

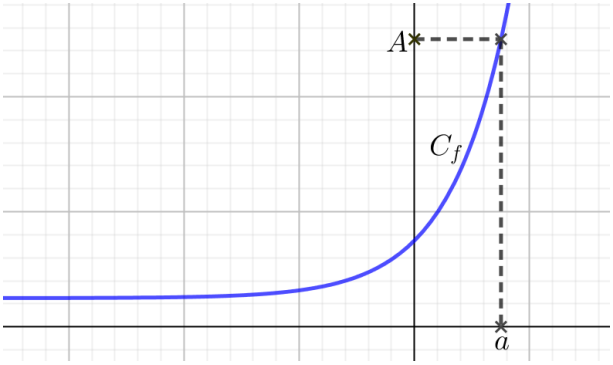
1.2. Limite infinie

Définition 5 – Limite donnant $+\infty$ en $+\infty$

f est définie sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$.
On dit que f a pour limite $+\infty$ quand $x \to +\infty$ lorsque tout intervalle du type $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand. On notera :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Remarque : si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors f n'est pas majorée.
Interprétation graphique :



Traduction mathématique : $\forall A > 0, \exists a > 0$ tel que $\forall x > \ldots\ldots, f(x) \in]\cdots\cdots; \cdots\cdots[$

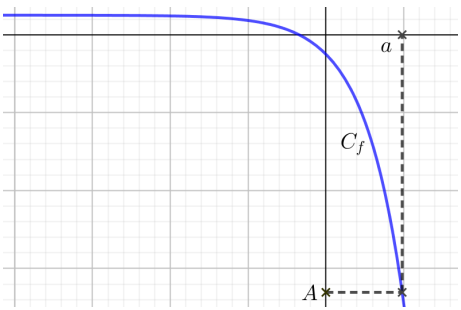
Définition 6 – Limite donnant $-\infty$ en $+\infty$

f est définie sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$.
On dit que f a pour limite $-\infty$ quand $x \to +\infty$ lorsque tout intervalle du type $]-\infty;A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.
On notera :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

Remarque : si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ alors f n'est pas minorée.

Interprétation graphique :



Traduction mathématique : $\forall A < 0, \exists a > 0$ tel que $\forall x > \ldots\ldots, f(x) \in]\ldots\ldots;\ldots\ldots[$

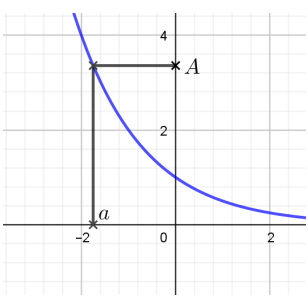
Définition 7 – Limite donnant $+\infty$ en $-\infty$

f est définie sur un intervalle de la forme $]-\infty;a[$.
On dit que f a pour limite $+\infty$ quand $x \to -\infty$ lorsque tout intervalle du type $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand dans les négatifs.
On notera :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

Remarque : si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ alors f n'est pas majorée.

Interprétation graphique :



Traduction mathématique : $\forall A > 0, \exists a < 0$ tel que $\forall x < \ldots\ldots, f(x) \in]\ldots\ldots;\ldots\ldots[$

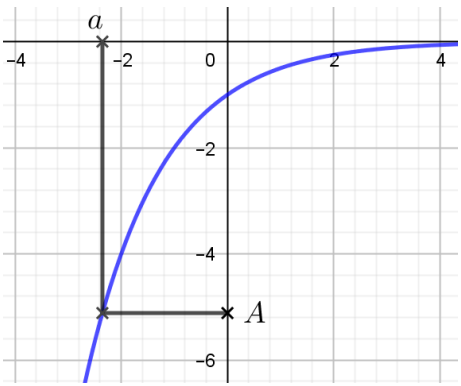
Définition 8 – Limite donnant $-\infty$ en $-\infty$

f est définie sur un intervalle de la forme $]-\infty; a[$.
On dit que f a pour limite $-\infty$ quand $x \to -\infty$ lorsque tout intervalle du type $]-\infty; A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand dans les négatifs.
On notera :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Remarque : si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ alors f n'est pas minorée.

Interprétation graphique :



Traduction mathématique : $\forall A < 0, \exists a < 0$ tel que $\forall x < \ldots\ldots, f(x) \in]\ldots\ldots; \ldots\ldots[$

Propriété 2 – Limites des fonctions usuelles

On note $k \in \mathbb{N}^*$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = \ldots\ldots$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = \ldots\ldots$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = \ldots\ldots$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = \ldots\ldots$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x = \ldots\ldots$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = \ldots\ldots$

Si k est pair, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = \ldots\ldots$ $\quad$ Si k est impair, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = \ldots\ldots$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = \ldots\ldots$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = \ldots\ldots$

Si $k > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{kx} = \ldots\ldots$ $\quad$ Si $k < 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{kx} = \ldots\ldots$

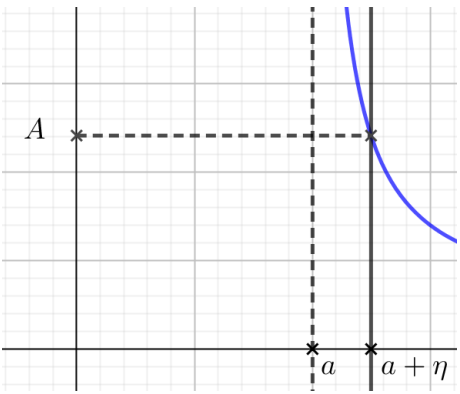
2. Limite d'une fonction en un réel a

Définition 9 – Limite donnant $+\infty$ à droite d'un réel a

Soit f une fonction définie sur $]a;b]$.
On dit que f admet pour limite à droite en a, $+\infty$ si tout intervalle du type $]A;+\infty[$ contient tout les $f(x)$ dès que x est assez proche de a, x restant à droite de a. On notera :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = +\infty$$

Interprétation graphique :



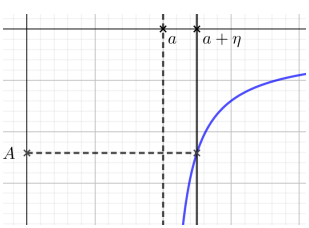
Traduction mathématique : $\forall A > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in]\ldots\ldots;\ldots\ldots[$, $f(x) \in]\ldots\ldots;\ldots\ldots[$

Définition 10 – Limite donnant $-\infty$ à droite d'un réel a

Soit f une fonction définie sur $]a;b]$.
On dit que f admet pour limite à droite en a, $-\infty$ si tout intervalle du type $]-\infty;A[$ contient tout les $f(x)$ dès que x est assez proche de a, x restant à droite de a. On notera :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = -\infty$$

Interprétation graphique :



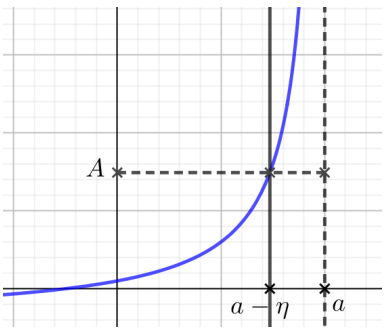
Traduction mathématique : $\forall A < 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in]\ldots\ldots;\ldots\ldots[$, $f(x) \in]\ldots\ldots;\ldots\ldots[$

Définition 11 – Limite donnant $+\infty$ à gauche d'un réel a

Soit f une fonction définie sur $[b, a[$.
On dit que f admet pour limite à gauche en a, $+\infty$ si tout intervalle du type $]A; +\infty[$ contient tout les $f(x)$ dès que x est assez proche de a, x restant à gauche de a. On notera :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = +\infty$$

Interprétation graphique :



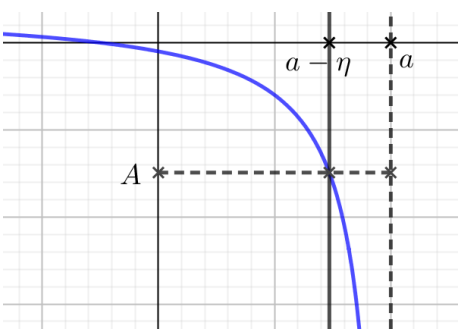
Traduction mathématique : $\forall A > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in]\ldots\ldots;\ldots\ldots[$, $f(x) \in]\ldots\ldots;\ldots\ldots[$

Définition 12 – Limite donnant $-\infty$ à gauche d'un réel a

Soit f une fonction définie sur $[b, a[$.
On dit que f admet pour limite à gauche en a, $-\infty$ si tout intervalle du type $]-\infty; A[$ contient tout les $f(x)$ dès que x est assez proche de a, x restant à gauche de a. On notera :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = -\infty$$

Interprétation graphique :



Traduction mathématique : $\forall A < 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in]\ldots\ldots;\ldots\ldots[$, $f(x) \in]\ldots\ldots;\ldots\ldots[$

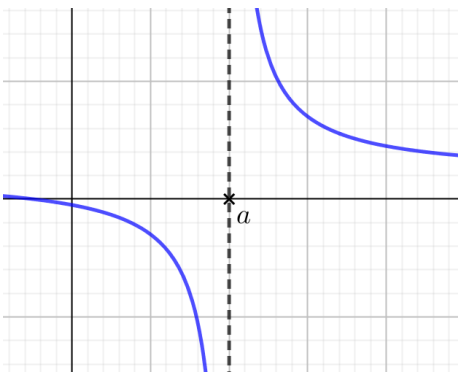
Définition 13 – limite en a

Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x)$ on dit que f admet une limite en a.

Définition 14 – Asymptote verticale

Si f a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ en a (ou à droite ou à gauche) alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe C_f.

Interprétation graphique : la courbe C_f se rapproche de la droite d'équation $x = a$ à gauche et/ou à droite de a.



Propriété 3 – Limites des fonctions usuelles

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = \ldots\ldots \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = \ldots\ldots \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x^2} = \ldots\ldots$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x^2} = \ldots\ldots \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = \ldots\ldots$$

3. Opération sur les limites

On a les mêmes résultats que pour les suites.
F.I veut dire que la limite est indéterminée et qu'il faut trouver une autre méthode pour la déterminer lorsque cela est possible.

3.1. Somme de fonctions

Propriété 4 – Limite de somme de fonctions

ℓ et ℓ' sont des réels.

$\lim f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\boldsymbol{\lim f(x)+g(x)}$	.....	.....	.....	.....	.....	.....

Exemples :

▷ Déterminons la $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}+x$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\ldots\ldots\\ \lim\limits_{x\to+\infty}x=\ldots\ldots\end{array}\right\}\text{donc par somme } \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+x=\ldots\ldots$$

▷ Déterminons la $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+x$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=\ldots\ldots\\ \lim\limits_{x\to+\infty}x=\ldots\ldots\end{array}\right\}\text{donc par somme } \lim_{x\to+\infty}x^2+x=\ldots\ldots$$

3.2. Produit de fonctions

Propriété 5 – Limite de produit de fonctions

ℓ et ℓ' sont des réels.

$\lim f(x)$	ℓ	$\ell\neq 0$	$\ell\neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\boldsymbol{\lim f(x)\times g(x)}$	.....	....	....	.....	.....

Exemples :

▷ Déterminons la $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1-\sqrt{x}\right)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = \ldots\ldots \\ \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 1 = \ldots\ldots \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -\sqrt{x} = \ldots\ldots\end{array}\right\} \text{donc par somme } \lim\limits_{x\to+\infty} 1-\sqrt{x} = \ldots\ldots\end{array}\right\} \text{donc par produit}$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3\left(1-\sqrt{x}\right) = \ldots\ldots$$

▷ Déterminons la $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4-\dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{2}{x^2}-3\right)$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 4 = \ldots\ldots \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = \ldots\ldots\end{array}\right\} \text{donc par somme } \lim\limits_{x\to+\infty}\left(4-\dfrac{1}{x}\right) = \ldots\ldots \\ \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x^2} = \ldots\ldots \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -3 = \ldots\ldots\end{array}\right\} \text{donc par somme } \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x^2}-3\right) = \ldots\ldots\end{array}\right\} \text{donc par produit}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(4-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{2}{x^2}-3\right) = \ldots\ldots$$

▷ Déterminons la $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+x$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = \ldots\ldots \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x = \ldots\ldots\end{array}\right\}$ donc par somme on obtient une forme indéterminée. Pour la déterminer on va factoriser par le terme de plus haut degré (terme dominant) x^2

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $x^2+x = x^2\,(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = \ldots\ldots \\ \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} 1 = \ldots\ldots \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = \ldots\ldots\end{array}\right\} \text{donc par somme } \lim\limits_{x\to-\infty} 1+\dfrac{1}{x} = \ldots\ldots\end{array}\right\} \text{donc par produit}$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^2+x = \ldots\ldots$$

Méthode 1 – Déterminer une forme indéterminée pour une somme

On s'arrange pour transformer la somme en produit, en factorisant par le terme dominant.

Exemples :

▷ Si $x \neq 0$, $x^2+3x = x^2\,(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

▷ Si $x \neq 0$, $x^3-3x^2+5x+1 = x^3\,(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

▷ Si $x > 0$, $3x-\sqrt{x} = x\,(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

Cas particulier : avec des racines carrées on peut utiliser le produit par l'expression conjuguée.
Exemple :

▷ $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=$

3.3. Quotient de fonctions

Propriété 6 – Limite de quotient de fonctions

ℓ et ℓ' sont des réels.

$\lim f(x)$	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim g(x)$	$\ell'(\ell' \neq 0)$	$+\infty$	0	$\ell'(\ell' \neq 0)$	0	$\pm\infty$
$\boldsymbol{\lim \frac{f(x)}{g(x)}}$	.....	.....	.....	.....	.....	.....

Exemples :

▷ Déterminons la $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x+3}{x^2-1}$

Etudions, pour commencer, le signe de x^2-1 :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		.....	0	.....	0	.....	

On en déduit que

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x^2-1=\ldots\ldots \\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x^2-1=\ldots\ldots \end{array}\right. \quad \text{On a donc}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1} 2x=\ldots\ldots \\ \lim\limits_{x\to 1} 3=\ldots\ldots \end{array}\right\} \text{donc par somme } \lim\limits_{x\to 1} 2x+3=\ldots\ldots \\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x^2-1=\ldots\ldots \\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x^2-1=\ldots\ldots \end{array}\right\} \end{array}\right\} \text{donc par quotient on}$$

obtient deux limites possibles

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{2x+3}{x^2-1}=\ldots\ldots \\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{2x+3}{x^2-1}=\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Méthode 2 – Déterminer une forme indéterminée pour un quotient

Lorsqu'un quotient est une forme indéterminée pour une limite, on utilise les méthodes suivants :

▷ Si la limite est en $\ell \in \mathbb{R}$, et que l'on obtient 0 comme limite au numérateur et au dénominateur, alors on factorise puis simplifie par $(x-\ell)$ le numérateur et le dénominateur.

Exemple :

▷ Déterminons la $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$

On remarque que 1 est une racine des deux polynômes x^2+2x-3 et x^2+x-2 donc

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2} =$$

On en déduit que

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1} x+3 = \ldots\ldots \\ \lim\limits_{x\to 1} x+2 = \ldots\ldots \end{array}\right\} \text{ donc par quotient } \lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2} = \ldots\ldots$$

▷ Si la limite est en $\pm\infty$, et que l'on obtient $\pm\infty$ comme limite au numérateur et au dénominateur, alors on factorise et simplifie par le terme dominant le numérateur et le dénominteur.

Exemple :

▷ Déterminons la $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-2x}{x^3-2}$

Pour tout $x \neq 0$,

$$\frac{x^2-2x}{x^2-2} =$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} 1-\dfrac{2}{x} = \ldots\ldots \\ \lim\limits_{x\to +\infty} 1-\dfrac{2}{x^3} = \ldots\ldots \\ \lim\limits_{x\to +\infty} x = \ldots\ldots \end{array}\right\} \text{ donc par produit } \lim\limits_{x\to +\infty} x\left(1-\dfrac{2}{x^3}\right) = \ldots\ldots \end{array}\right\}$$

donc par quotient $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-2x}{x^2-2} = \ldots\ldots$

4. Limites et comparaison

Propriété 7 – Théorème de comparaison

f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I au voisinage de a (intervalle ouvert contenant a), a étant un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

▷ Si pour tout x dans I, $\begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty \end{cases}$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

▷ Si pour tout x dans I, $\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty \end{cases}$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

Démonstration

▷ Démontrons que si pour tout x dans I, $\begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty \end{cases}$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

▶ Si $a \in \mathbb{R}$:
Pour tout $A > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\eta; a+\eta[$, $g(x) \in]A; +\infty[$
donc $A < g(x) \leq f(x)$ alors $f(x) \in]A; +\infty[$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

▶ Si a est $+\infty$:
Pour tout $A > 0$, il existe $a > 0$ tel que pour tout $x \in]a; +\infty[$, $g(x) \in]A; +\infty[$
donc $A < g(x) \leq f(x)$ alors $f(x) \in]A; +\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

▶ Si a est $-\infty$:
Pour tout $A > 0$, il existe $a < 0$ tel que pour tout $x \in]-\infty; a[$, $g(x) \in]A; +\infty[$
donc $A < g(x) \leq f(x)$ alors $f(x) \in]A; +\infty[$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

▷ Démontrons que si pour tout x dans I, $\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty \end{cases}$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

▶ Si $a \in \mathbb{R}$:
Pour tout $A < 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\eta; a+\eta[$, $g(x) \in]-\infty; A[$
donc $f(x) \leq g(x) < A$ alors $f(x) \in]-\infty; A[$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

▶ Si a est $+\infty$:
Pour tout $A < 0$, il existe $a > 0$ tel que pour tout $x \in]a; +\infty[$, $g(x) \in]-\infty; A[$
donc $f(x) \leq g(x) < A$ alors $f(x) \in]-\infty; A[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

▶ Si a est $-\infty$:
Pour tout $A < 0$, il existe $a < 0$ tel que pour tout $x \in]-\infty; a[$, $g(x) \in]-\infty; A[$

donc $f(x) \leq g(x) < A$ alors $f(x) \in]-\infty; A[$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Propriété 8 – Théorème d'encadrement

f, g et h sont trois fonctions définies sur un intervalle I au voisinage de a (intervalle ouvert contenant a), a étant un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. On note $\ell \in \mathbb{R}$

▷ Si pour tout x dans I, $\begin{cases} f(x) \geq g(x) \geq h(x) \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell \end{cases}$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$

Remarque : ce théorème se nomme dans certains manuels "**théorème des gendarmes**" mais évitons ce qualificatif car les gendarmes n'ont pas seulement un rôle d'encadrement dans la vie hors des mathématiques.

Démonstration

▶ Si $a \in \mathbb{R}$:
Pour tout $\epsilon > 0$,
il existe $\eta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in]a - \eta_1; a + \eta_1[$, $f(x) \in]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$ et il existe $\eta_2 > 0$ tel que pour tout $x \in]a - \eta_2; a + \eta_2[$, $h(x) \in]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$
On note $\eta_3 = \text{Max}\{\eta_1; \eta_2\}$, alors pour tout $x \in]a - \eta_3; a + \eta_3[$
comme $h(x) \leq g(x) \leq f(x)$ alors $g(x) \in]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$

▶ Si a est $+\infty$:
Pour tout $\epsilon > 0$,
il existe $a_1 > 0$ tel que pour tout $x \in]a_1; +\infty[$, $f(x) \in]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$
il existe $a_2 > 0$ tel que pour tout $x \in]a_2; +\infty[$, $h(x) \in]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$
On note $a_3 = \text{Max}\{a_1; a_2\}$, alors pour tout $x \in]a_3; +\infty[$
comme $h(x) \leq g(x) \leq f(x)$ alors $g(x) \in]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell$

▶ Si a est $-\infty$:
Pour tout $\epsilon > 0$,
il existe $a_1 < 0$ tel que pour tout $x \in]-\infty; a_1[$, $f(x) \in]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$
il existe $a_2 < 0$ tel que pour tout $x \in]-\infty; a_2[$, $h(x) \in]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$
On note $a_3 = \text{Min}\{a_1; a_2\}$, alors pour tout $x \in]-\infty; a_3[$
comme $h(x) \leq g(x) \leq f(x)$ alors $g(x) \in]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon_3[$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \ell$

Exemples :

Propriété 9 – Croissance comparée de x^n et e^x

▷ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

▷ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$

Démonstration

► $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

▷ Commençons par démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.
On note $f : x \mapsto e^x - x$.

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Comme la fonction $x \mapsto e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et que $e^0 = 1$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \ldots\ldots 0$ sur $]0;+\infty[$ et $f'(x) \ldots\ldots 0$ sur $]-\infty;0[$.

f admet donc un minimum en 0 et ce minimum est $f(0) =$.

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > \ldots\ldots \Leftrightarrow e^x - x > 0 \Leftrightarrow e^x \ldots\ldots x$.

Appliquons cette inégalité pour $\dfrac{x}{2}$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{\frac{x}{2}} \ldots\ldots \dfrac{x}{2}$ et comme la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ alors on obtient en élevant au carré $e^x \ldots\ldots \dfrac{x^2}{4}$.

Pour $x > 0$, en divisant par x, on obtient $\dfrac{e^x}{x} \ldots\ldots \dfrac{x}{4}$.

D'après la propriété précédente, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{4} = \ldots\ldots$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = \ldots\ldots$

▷ Démontrer maintenant que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$.

Pour tout $n \geq 1$, $\left(\dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n \times \dfrac{1}{n^n} =$

En posant $y = \dfrac{x}{n}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = \lim\limits_{y\to+\infty} \left(\dfrac{e^y}{y}\right)^n = \ldots\ldots$

► $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$

Cette limite est une forme indéterminée.
D'après le paragraphe précédent $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = \ldots\ldots$ alors par inverse $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = \ldots\ldots.$
En posant $y = -a$, on a donc
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = \lim\limits_{y\to+\infty} (-y)^n e^{-y} = \lim\limits_{y\to+\infty} (-1)^n \dfrac{y^n}{e^y} = \ldots\ldots.$

Exemples :

▷ Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - \dfrac{x^2}{2}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x - \dfrac{x^2}{2} = x^2\,(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

or par croissance comparée $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = \ldots\ldots$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{e^x}{x^2} - \dfrac{1}{2}\right) = \ldots\ldots$

de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = \ldots\ldots$

donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - \dfrac{x^2}{2} = \ldots\ldots$

▷ Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x(x^2 - 3x + 1)$
Cette forme est une forme indéterminée.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x(x^2 - 3x + 1) = x^2e^x - 3xe^x + e^x$
or par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$
et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x(x^2 - 3x + 1) = 0$.

5. Continuité

5.1. Définition

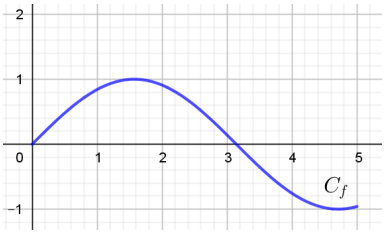
Définition 15 – Continuité en a

f est définie sur un intervalle I et $a \in$ I.
f est continue en a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

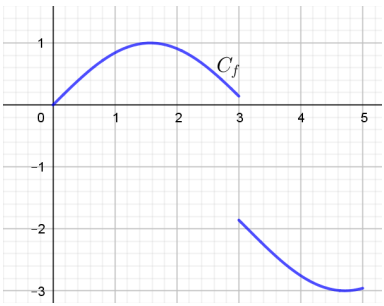
Définition 16 – Continuité sur un intervalle I

f est continue sur I si elle est continue en tout a de I.

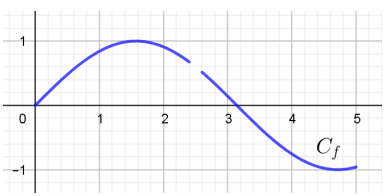
Remarque : graphiquement la continuité sur I est traduite par le fait que l'on peut passer un crayon sur la courbe de f sans lever le stylo.
Exemples :
▷ La fonction ci-dessous est continue sur $[0;5]$



▷ La fonction ci-dessous n'est pas continue sur $[0;5]$



▷ La fonction ci-dessous n'est pas continue sur $[0;5]$



Propriété 10 – Lien entre dérivabilité et continuité

Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

⚠ La réciproque est fausse. Par exemple, les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto |x|$ sont continues en 0 mais ne sont pas dérivables en 0.

Démonstration

f est une fonction dérivable sur I donc pour tout $a \in$ I,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \dots\dots\dots$$

On note g la fonction définie sur I par $g(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$.
Déterminons sa limite lorsque x tend vers a de deux façons différentes :
▷ Comme $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \dots\dots$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \dots\dots$
▷ Calculons la limite par opérations sur les limites :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) &= \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} f(a) - \lim_{x\to a} f'(a) \times \lim_{x\to a}(x-a)\\ &= \lim_{x\to a} f(x) - f(a) - \lim_{x\to a} f'(a) \times \ldots\ldots\\ &= \lim_{x\to a} f(x) - f(a)\end{aligned}$$

d'après les deux résultats précédents, $\lim\limits_{x\to a} f(x) - f(a) = \ldots\ldots \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) \ldots\ldots f(a)$
donc f est ..... en a.

5.2. Continuité et suites définies par récurrence

Propriété 11 – Continuité et suites définies par récurrence

On note f une fonction continue sur I et u une suite vérifiant que pour tout n, $u_n \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si la suite u converge alors sa limite ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$.

Démonstration

Comme u converge alors u admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ telle que $\ell \in \mathrm{I}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
On a vu dans le chapitre sur les suites que cette limite ℓ était unique donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$
Comme f est continue alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right)$
On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$ donc $f(\ell) = \ell$

Exemple :

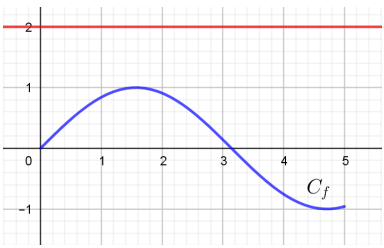
On note u la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$, $u_n \in [0,1]$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n^2}{u_n+1}$.
On admet ici que l'on a montré que cette suite est strictement décroissante et comme elle est minorée alors d'après le théorème de convergence monotone, cette suite u est convergente et admet une limite $\ell \in [0;1]$.
On souhaite déterminer cette limite :
On note $f : x \mapsto \dfrac{2x^2}{x+1}$ est un quotient de fonctions dérivables sur $[0;1]$ et le dénominateur ne s'annule pas sur $[0;1]$ donc f est dérivable et continue sur $[0;1]$.
Par continuité de f et unicité de la limite de u, ℓ est solution de l'équation $f(\ell) = \ell$

$f(\ell) = \ell \Leftrightarrow$

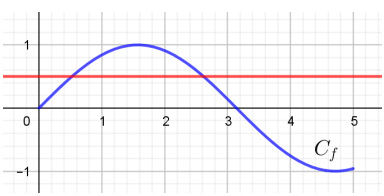
Il y a donc deux possibilités : $\ell = \ldots\ldots$ ou $\ell = \ldots\ldots$.
or u est strictement décroissante et $u_0 = \dfrac{1}{2}$ donc $\ell < \dfrac{1}{2}$ et ainsi $\ell = \ldots\ldots$.

5.3. Théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I.)

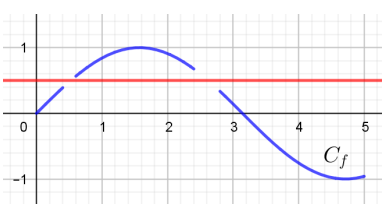
f est une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$.
On note k un nombre réel.
▷ L'équation $f(x) = k$ a-t-elle forcément au moins une solution ?
Non car k n'est pas forcément une image d'un nombre de l'ensemble de définition.
Exemple :
L'équation $f(x) = 2$ n'a pas de solution sur $[0;5]$ pour la fonction représentée ci-dessous.



▷ Quelle(s) condition(s) faut-il sur f pour qu'il y ait au moins une solution ?
Il faut que k soit une ou plusieurs des images d'antécédent(s) de l'ensemble de définition ($k \in f([a;b])$) et que la fonction f soit continue.
L'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ a deux solutions sur $[0;5]$ pour la fonction représentée ci-dessous.



L'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ n'a pas de solution sur $[0;5]$ pour la fonction représentée ci-dessous.



▷ Quelle(s) condition(s) faut-il sur f pour qu'il y ait une seule solution ? Il faut trois conditions : f doit être continue, strictement monotone et k doit être une des images possibles.
L'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ a une seule solution sur $[0;5]$ pour la fonction représentée ci-dessous.

Propriété 12 – Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. Pour tout $k \in f([a;b])$, il existe au moins un réel α de $[a;b]$ tel que $f(\alpha) = k$.

Démonstration

Cette démonstration est étudiée dans la partie exercice, en exercice d'approfondissement.

Propriété 13 – Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a;b]$. Pour tout $k \in f[a;b])$, il existe un unique réel α de $[a;b]$ tel que $f(\alpha) = k$.

Méthode 3 – Utilisation du corollaire du T.V.I

Exemple :

On note $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$

▷ f est une fonction dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$.

▷ $f'(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc f est strictement croissante donc strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

▷ $f(0) = -1$ et $f(1) = \frac{4}{3}$ donc $0 \in f([0;1])$

d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaire, $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0;1]$.

Autre possibilité :

▷ f est une fonction dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$.

▷ $f'(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc f est strictement croissante donc strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

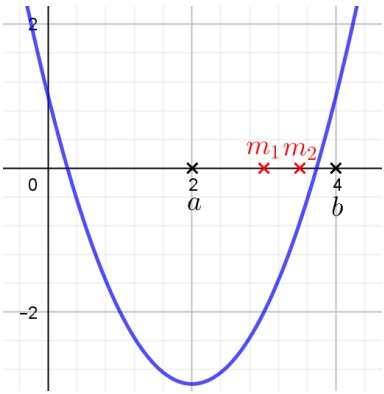
▷ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ donc $0 \in f(\mathbb{R})$

d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

6. Recherche de valeurs approchées des solutions d'une équation

6.1. Méthode de résolution des équations par dichotomie

Méthode 4 – Exemple de recherche d'une valeur approchée d'une équation



On note $f : x \mapsto x^2 - 4x + 1$ et on a montré que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[2;4]$
On cherche à trouver une valeur approchée de cette solution.
On note $a = 2$ et $b = 4$ et on calcule $m_1 = \dfrac{a+b}{2}$.
▷ Si $f(a)$ et $f(m_1)$ sont de signes contraires (ou si $f(a) \times f(m_1) < 0$) alors on remplace b par m_1 sinon on remplace a par m_1.
Dans l'exemple ci-dessus on remplace a par m_1 et on recommence à faire l'étude sur $[m_1; b]$.
On calcule $m_2 = \dfrac{m_1+b}{2}$.
Si $f(m_1)$ et $f(m_2)$ sont de signes contraires alors on remplace b par m_2 sinon on remplace m_1 par m_2. Et on recommence le même processus jusqu'à obtenir un intervalle avec la précision voulue.
Dans l'exemple on remplace m_1 par m_2 et on sait que la solution est dans $[m_2; b]$.

On peut aussi programmer la recherche d'une valeur approchée à l'aide de Python :

```
from  math import*

def f(x):
    return x**2-4*x+1

def Dichotomie(a,b,n):
    while b-a>=pow(10,-n):
        m=(a+b)/2
        if f(a)*f(m)<=0:
```

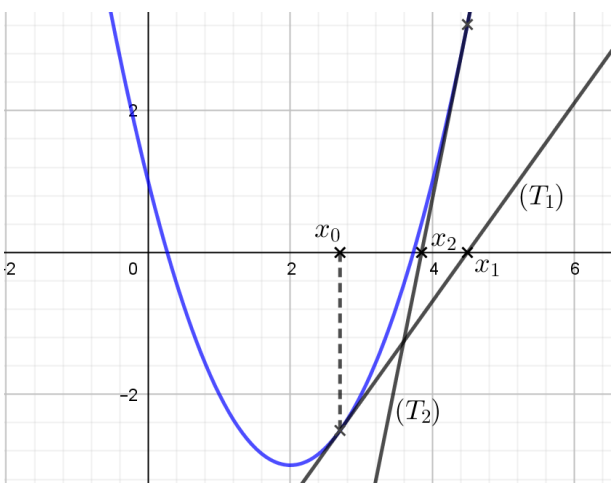
```
            b=m
        else:
            a=m
    return (a,b)
```

Résultats obtenus

```
Dichotomie(2,4,3)
(3.7314453125, 3.732421875)
```

6.2. Méthode de Newton-Raphson

On note $f : x \mapsto x^2 - 4x + 1$ et on a montré que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[2;4]$
On cherche à trouver une valeur approchée de cette solution.
On note $x_0 = 2,7$ un nombre proche de la solution.
La fonction dérivée de f ne doit pas s'annuler en x_0. On trace (T_1) la tangente à C_f au point d'abscisse x_0 et on note x_1 l'abscisse du point d'intersection entre (T_1) et l'axe des abscisses.
On recommence le même processus à partir de x_1.
On trace (T_2) la tangente à C_f au point d'abscisse x_1 et on note x_2 l'abscisse du point d'intersection entre (T_2) et l'axe des abscisses.
On construit peu à peu une suite (x_n) de nombre qui tend vers la solution cherchée.



L'équation d'une tangente (T_n) à C_f au point d'abscisse x_n est

$$y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$$

On considère que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f'(x_n) \neq 0$.
Pour trouver l'abscisse de l'intersection entre (T_n) et l'axe des abscisses que l'on note

x_{n+1}, on résout :

$$\begin{aligned} y = 0 &\Leftrightarrow f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow f'(x_n)x_{n+1} - f'(x_n)x_n = -f(x_n) \Leftrightarrow f'(x_n)x_{n+1} = -f(x_n) + f'(x_n)x_n \\ &\Leftrightarrow x_{n+1} = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + x_n \end{aligned}$$

On obtient donc la suite (x_n) telle que $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
On peut contruire le programme Python ci-après, pour déterminer une valeur approchée de la solution cherchée.

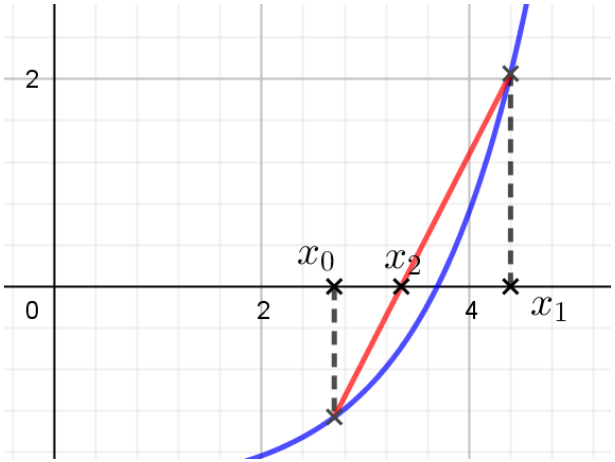
```
from  math import*

def f(x):
    return x**2-4*x+1

def df(x):
    return 2*x-4

def Newton(x,n):
    while abs(f(x)/df(x))>=pow(10,-n):
        x=x-f(x)/df(x)
    return x
```

Résultats obtenus

```
Newton(3,4)
3.732142857142857
Newton(3,7)
3.732050810014728
```

6.3. Méthode de la sécante

La méthode de la sécante est presque identique à la méthode de Newton mais au lieu d'utiliser les tangentes, on utilise les cordes.
On part d'un intervalle $[x_0; x_1]$ dans lequel il y a la solution.
On construit la corde passant par les points de la courbe d'abscisse x_0 et x_1.
On note x_2 l'abscisse du point d'intersection entre cette corde et l'axe des abscisses.
On recommence le même processus en partant de l'intervalle $[x_2; x_1]$.



L'équation de la corde reliant deux points de la courbe d'abscisse x_{n-1} et x_n est

$$y = \Delta(x - x_n) + f(x_n)$$

en ayant posé $\Delta = \dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$.
On considère que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq x_{n-1}$ et $f(x_n) \neq f(x_{n-1})$.
Pour trouver l'abscisse de l'intersection entre la corde et l'axe des abscisses que l'on note x_{n+1}, on résout :

$$\begin{aligned} y = 0 &\Leftrightarrow \Delta(x_{n+1} - x_n) + f(x_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow \Delta x_{n+1} - \Delta x_n = -f(x_n) \Leftrightarrow \Delta x_{n+1} = -f(x_n) + \Delta x_n \\ &\Leftrightarrow x_{n+1} = -\frac{f(x_n)}{\Delta} + x_n \end{aligned}$$

On obtient donc la suite (x_n) telle que $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$.
On peut contruire le programme Python ci-après, pour déterminer une valeur approchée de la solution cherchée.

```
from  math import*

def f(x):
    return x**2-4*x+1

def Secante(a,b,n):
    if f(b)!=f(a):
        while abs(b-a)>=pow(10,-n):
            c=b
            b=b-f(b)*(b-a)/(f(b)-f(a))
            a=c
    else:
        print("Impossible car f(a)=f(b)")
    return (a,b)
```

Résultats obtenus

```
Secante(2,4,3)
(3.7320441988950277, 3.732050805123027)
Secante(2,4,7)
(3.732050805123027, 3.7320508075688816)7
```