CHAPITRE 13

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Élément important de calcul en géométrie euclidienne, le produit scalaire apparaît assez tard dans l'histoire des mathématiques. On en trouve trace chez Hamilton en 1843. Peano le définit ensuite associé à un calcul d'aire ou de déterminant. Roberto Marcolongo et Cesare Burali-Forti le définissent seulement à l'aide du cosinus d'un angle et lui donnent le nom de produit scalaire. C'est sous cette forme qu'il apparaît par la suite. Sa qualité de forme bilinéaire symétrique sera ensuite exploitée en algèbre linéaire et, de propriété, deviendra définition.
Le calcul vectoriel et le produit scalaire permettent une approche différente de la géométrie de celle des Anciens, sans doute puissante, avec l'avantage de combiner vision géométrique et calcul.

Les contenus du chapitre

▷ Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace. Bilinéarité et symétrie.
▷ Orthogonalité de deux vecteurs. Caractérisation par le produit scalaire.
▷ Base orthonormée, repère orthonormé.
▷ Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée. Expressions du produit scalaire et de la norme. Expression de la distance.
▷ Développement de $\|\vec{u}+\vec{v}\|$, formule de polarisation.
▷ Orthogonalité de deux droites, d'un plan et d'une droite.
▷ Vecteur normal à un plan. Etant donnés un point A et un vecteur non nul $\vec{n}$, plan passant par A et normal à $\vec{n}$.
▷ Projeté orthogonal d'un point sur une droite et sur un plan.

Les capacités attendues du chapitre

▷ Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, pour calculer un angle, une longueur dans l'espace.
▷ Utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à une droite ou à un plan.
▷ Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs et mesures. Longueur, angle, aire et volume.
▷ Etudier des problèmes de configurations dans l'espace.

Cours

On note $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

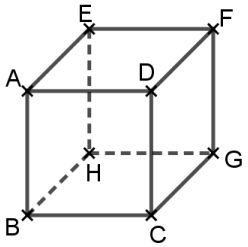
1. Définitions, notations et propriétés

Définition 1 – Produit scalaire

On note $\widehat{AOB}$ l'angle géométrique où $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.
Cet angle ne dépend pas du point O choisi et ne dépend que de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Pris dans $[0;\pi]$ il représente l'angle $(\vec{u};\vec{v})$.
On nomme produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u}.\vec{v}$, le nombre réel définit par :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{cases} 0 \text{ si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \\ \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v}) \end{cases}$$

Exemples :
ABCDEFGH est un cube de longueur de côté 1.



▷ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

▷ $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{HG} = AD \times HG \times \cos(0) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

▷ $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CB} = EF \times CB \times \cos(\pi) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

▷ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HG} = AB \times HG \times \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Propriété 1 – Autres définitions du produit scalaire

Deux vecteurs de l'espace étant coplanaires (dans le même plan) alors les définitions liant le produit scalaire et deux vecteurs, sont les mêmes que celles du plan :
▷ Si $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OH}$ le projeté orthogonal de $\overrightarrow{OB}$ sur (OA) alors

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}$$

▷ Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal, si les vecteurs ont pour coordonnées $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Démonstration

Voir les démonstrations faites en première.

2. Propriétés du produit scalaire

Propriété 2 – Propriétés du produit scalaire

Deux vecteurs de l'espace étant coplanaires (dans le même plan) alors les propriétés liant le produit scalaire et deux vecteurs, sont les mêmes que celles du plan :
Pour tout $\vec{u}, \vec{v}, \lambda \in \mathbb{R}$,
▷ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (Commutativité)
▷ Si $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ avec $\lambda > 0$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
▷ Si $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ avec $\lambda < 0$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
▷ $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
▷ $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$
▷ $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda \times \vec{u} \cdot \vec{v}$ (Associativité)

Démonstration

Voir les démonstrations faites en première.

Propriété 3 – Distributivité

Pour tout $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

Démonstration

On note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ alors $\vec{v} + \vec{w}\begin{pmatrix} x' + x'' \\ y' + y'' \\ z' + z'' \end{pmatrix}$ et

$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) =$

De plus $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} =$

donc :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

Propriété 4 – Formules de polarisation

Pour tout $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace :

▷ $\| \vec{u} + \vec{v} \|^2 = \| \vec{u} \|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \| \vec{v} \|^2$

▷ $\| \vec{u} - \vec{v} \|^2 = \| \vec{u} \|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \| \vec{v} \|^2$

▷ $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \| \vec{u} \|^2 - \| \vec{v} \|^2$

Démonstration

Pour tout $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace :

▷

$\| \vec{u} + \vec{v} \|^2 =$

▷

$\| \vec{u} - \vec{v} \|^2 =$

▷

$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) =$

Propriété 5 – Formule du parallélogramme

Pour tout $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace :

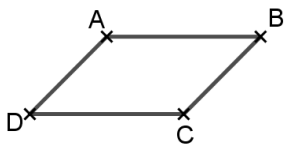
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left[\| \vec{u} + \vec{v} \|^2 - \| \vec{u} \|^2 - \| \vec{v} \|^2\right]$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left[\| \vec{u} \|^2 + \| \vec{v} \|^2 - \| \vec{u} - \vec{v} \|^2\right]$$

Démonstration

Cela découle des formules de polarisations.

Exemples :
$ABCD$ est un parallélogramme.



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} &= \frac{1}{2}\left[\| \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} \|^2 - \| \overrightarrow{DA} \|^2 - \| \overrightarrow{DC} \|^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\| \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} \|^2 - \| \overrightarrow{DA} \|^2 - \| \overrightarrow{DC} \|^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\| \overrightarrow{DB} \|^2 - \| \overrightarrow{DA} \|^2 - \| \overrightarrow{DC} \|^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[DB^2 - DA^2 - DC^2\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} &= \frac{1}{2}\left[\| \overrightarrow{DA} \|^2 + \| \overrightarrow{DC} \|^2 - \| \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC} \|^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\| \overrightarrow{DA} \|^2 + \| \overrightarrow{DC} \|^2 - \| \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} \|^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\| \overrightarrow{DA} \|^2 + \| \overrightarrow{DC} \|^2 - \| \overrightarrow{CA} \|^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[DA^2 + DC^2 - CA^2\right]
\end{aligned}$$

3. Norme, distance et milieu

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal, si les vecteurs ont pour coordonnées $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

On note $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace.

Propriété 6 – Géométrie analytique

▷ Autre expression des coordonnées : $\vec{u}\begin{pmatrix} \vec{u} \cdot \vec{i} \\ \vec{u} \cdot \vec{j} \\ \vec{u} \cdot \vec{k} \end{pmatrix}$

▷ $\| \vec{u} \| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

▷ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ et $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Démonstration

▷ $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{i}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{k}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc :

$\vec{u} \cdot \vec{i} =$

$\vec{u} \cdot \vec{j} =$

$\vec{u} \cdot \vec{k} =$

▷ $\| \vec{u} \|^2 =$

et comme $\| \vec{u} \| \geq 0$ alors :

$$\| \vec{u} \| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

▷

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ et $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Exemples :

On note $A(-2;3;5)$ et $B(3;1;-2)$ dans un repère orthonormal.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$
et
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} =$

4. Droites, plans, vecteurs normal

Définition 2 – Vecteur normal à un plan

Soit $\mathscr{P}$ un plan de l'espace, alors tout vecteur directeur d'une droite orthogonale à $\mathscr{P}$ est appelé **vecteur normal** à $\mathscr{P}$ et si $\vec{n}$ est normal à $\mathscr{P}$ alors il est orthogonal à tous les vecteurs du plan $\mathscr{P}$.

Propriété 7 – Ensemble des points du plan et vecteur normal

On note $\mathscr{P}$ un plan de l'espace, $A \in \mathscr{P}$ et $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathscr{P}$, alors :

$$M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

Le plan $\mathscr{P}$ est donc le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Démonstration

$\vec{n}$ est normal à $\mathscr{P}$ alors $\vec{n}$ est orthogonal à tous les vecteurs du plan $\mathscr{P}$ et une droite (D) de vecteur directeur $\vec{n}$ est orthogonal au plan $\mathscr{P}$.

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow M = A \text{ ou } (M \neq A \text{ et } (AM) \perp (D))$$

M appartient donc au plan passant par A et orthogonal à (D).

Propriété 8 – Equation cartésienne d'un plan

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
Le plan $\mathscr{P}$ a une équation cartésienne de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0, \text{ où } d \in \mathbb{R}$$

Démonstration

Le plan $\mathscr{P}$ passe par un point $A(x_A; y_A; z_A)$.

On note $M(x; y; z)$ un point du plan $\mathscr{P}$ alors $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix}$. On cherche une relation algébrique liant x, y et z de n'importe quel point de $\mathscr{P}$. $M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow$

en posant $d = -ax_A - by_A - cz_A$ on obtient bien $\ldots x + \ldots y + \ldots z + \ldots = \ldots$

Exemple :
Déterminons une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par $A(-2; 1; 3)$ et de vecteur normal $n\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

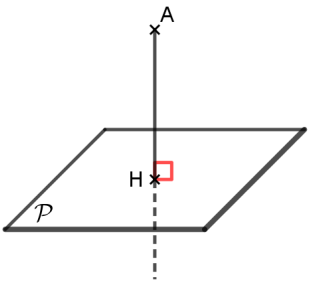
$M(x; y; z)$ un point de $\mathscr{P}$ alors $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x + 2 \\ y - 1 \\ z - 3 \end{pmatrix}$.

$M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow$

5. Projection orthogonale

Définition 3 – projeté orthogonal d'un point sur un plan

Le projeté orthogonal d'un point A sur un plan $\mathscr{P}$ est le point d'intersection H entre le plan $\mathscr{P}$ et la droite passant par A et de vecteur directeur un vecteur $\vec{n}$ normal au plan $\mathscr{P}$.

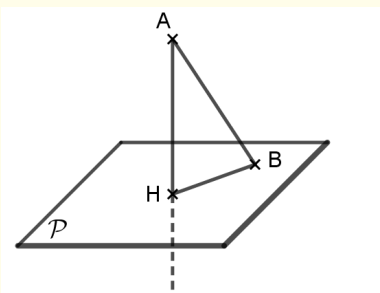


Propriété 9 – Projeté orthogonal et point le plus proche

Le projeté orthogonal du point A sur un plan $\mathscr{P}$ est le point de $\mathscr{P}$ le plus proche du point A.

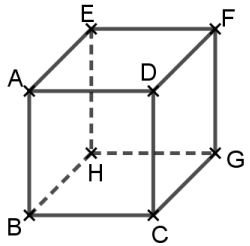
Démonstration

Soit $\mathscr{P}$ un plan et A un point qui n'est pas sur $\mathscr{P}$.
On note H le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$.



Pour tout point B quelconque de $\mathscr{P}$:
Le triangle AHB est rectangle en H donc l'hypoténuse $[AB]$ est le plus grand côté du triangle rectangle donc $HA < BA$.
Conclusion : H est le point le plus proche de A sur le plan $\mathscr{P}$.

Exemples :
ABCDEFGH est un cube de longueur de côté 1.



▷ D est le projeté orthogonal de A sur le plan (DFG).
▷ A est le projeté orthogonal de B sur le plan (AEF).
▷ D n'est pas le projeté orthogonal de B sur le plan (ADF) car (BD) n'est pas orthogonale au plan (ADF).

Définition 4 – Distance d'un point à un plan

La distance d'un point M de l'espace à un plan $\mathscr{P}$ est la distance entre M et le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$.

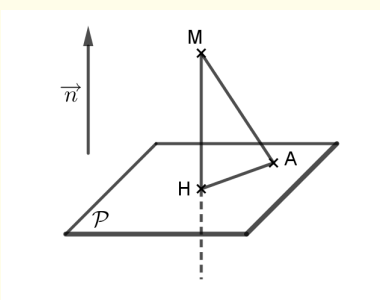
Propriété 10 – Distance d'un point à un plan

Soit A un point de l'espace, $\vec{n}$ un vecteur non nul et $\mathscr{P}$ le plan passant par A de vecteur normal $\vec{n}$.
Pour tout point M de l'espace, alors la distance de M à $\mathscr{P}$ est donnée par :

$$d(M,\mathscr{P}) = \frac{\left|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}$$

Démonstration

On note H le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$.



$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = (\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HM})\cdot\vec{n} =$

or $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n} = \ldots\ldots$
car $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ sont .....

On a donc :

$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} =$

or $\overrightarrow{HM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires donc $\cos(\overrightarrow{HM}, \vec{n}) = \ldots\ldots\ldots$
en passant à la valeur absolue :

$$\left|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}\right| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

donc :

$HM = d(M, \mathscr{P}) =$

6. Représentations paramétriques

Propriété 11 – Représentations paramétriques d'une droite

On note (D) une droite de l'espace, passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur non nul $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$.

$$M \in (D) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

$\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$ est une **représentation paramétrique** de la droite (D).

⚠ t est un paramètre et peut être remplacé par n'importe quelle lettre.

⚠ Si vous n'écrivez pas le « $t \in \mathbb{R}$ » alors vous ne décrivez pas toute la droite (D).

Démonstration

On note (D) une droite de l'espace, passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur non nul $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
M \in (D) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires}\\
&\Leftrightarrow \text{Il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}\\
&\Leftrightarrow \text{Il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = t\,\vec{u}\\
&\Leftrightarrow \text{Il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\,\vec{u}\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ z = \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \text{, où } t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Propriété 12 – Représentations paramétriques d'un plan

On note $\mathscr{P}$ un plan de l'espace, passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteurs directeurs non nuls $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{pmatrix}$.

$$M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = x_A + t_1\alpha + t_2\alpha' \\ y = y_A + t_1\beta + t_2\beta' \\ z = z_A + t_1\gamma + t_2\gamma' \end{array}\right. \text{, où } t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

$\left\{\begin{array}{l} x = x_A + t_1\alpha + t_2\alpha' \\ y = y_A + t_1\beta + t_2\beta' \\ z = z_A + t_1\gamma + t_2\gamma' \end{array}\right.$, où $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ est une **représentation paramétrique** du plan $\mathscr{P}$.

⚠ t_1, t_2 sont des paramètres et peuvent être remplacés par n'importe quelles lettres.

⚠ Si vous n'écrivez pas le « $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ » alors vous ne décrivez pas tout le plan $\mathscr{P}$.

Démonstration

On note $\mathscr{P}$ un plan de l'espace, passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteurs directeurs non nuls $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
M \in \mathscr{P} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et une combinaison linéaire de } \vec{u} \text{ et } \vec{v}\\
&\Leftrightarrow \text{Il existe } t_1, t_2 \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = t_1\,\vec{u} + t_2\,\vec{v}\\
&\Leftrightarrow \text{Il existe } t_1, t_2 \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = t_1\,\vec{u} + t_2\,\vec{v}\\
&\Leftrightarrow \text{Il existe } t_1, t_2 \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t_1\,\vec{u} + t_2\,\vec{v}\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \text{, où } t_1, t_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$