CHAPITRE 12

# GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Au XIX$^{e}$ siècle, la notion de vecteur va émerger comme objet algébrique et géométrique, comme transformation ou comme outil de repérage. Hamilton construit les vecteurs par une approche algébrique. Dans sa théorie des forces et des marées de 1839, Grassmann propose une approche géométrique qui étend à l'espace la notion de vecteur et lui associe des règles de calcul algébrique, notamment un « produit linéaire » utilisant la projection orthogonale et qui deviendra notre produit scalaire. À la fin du siècle, des auteurs proches des mathématiques comme de la physique (Maxwell, Gibbs, Heaviside ou Peano) dégagent les principes du calcul vectoriel à trois dimensions ou plus, lui donnant une dimension dynamique tout en établissant la structure d'espace vectoriel.
En 1841 Chasles enseigne à l'école polytechnique puis à la Sorbonne en 1846. Il entre à l'Académie des sciences en 1851. Chasles expose la relation qui porte son nom dans son Traité de géométrie supérieure (1852).

**Les contenus du chapitre**
▷ Vecteurs de l'espace. Translations.
▷ Combinaisons linéaires de vecteurs de l'espace.
▷ Droite de l'espace. Vecteurs directeurs d'une droite. Vecteurs colinéaires.
▷ Caractérisation d'une droite par un point et un vecteur.
▷ Plan de l'espace. Direction d'un plan de l'espace.
▷ Caractérisation d'un plan de l'espace par un point et un couple de vecteurs non colinéaires.
▷ Bases et repères de l'espace. Décomposition d'un vecteur sur une base.

**Les capacités attendues du chapitre**
▷ Représenter des combinaisons linéaires de vecteurs donnés.
▷ Exploiter une figure pour exprimer un vecteur comme combinaison linéaire de vecteurs.
▷ Décrire la position relative de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans.
▷ Lire sur une figure si deux vecteurs d'un plan, trois vecteurs de l'espace forment une base.
▷ Lire sur une figure la décomposition d'un vecteur dans une base.
▷ Etudier géométriquement des problèmes simples de configurations dans l'espace : alignement, colinéarité, parallélisme, coplanarité.

# Cours

## 1. Vecteurs et base de l'espace

On étend à l'espace la notion de vecteur vue en seconde.

**Propriété 1 – Rappels de seconde applicables dans l'espace**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
▷ Si $A$, $B$, $C$, $D$, sont des points du plan alors :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow ABCD \text{ est un parallélogramme.}$$

▷ $M$ est un point de l'espace, si et seulement si, il existe un unique triplet $(x, y, z)$ tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Dans ce cas le triplet $(x, y, z)$ représente les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ et les coordonnées de $M$.

▷ Les formules de calcul des coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, de la distance $AB$, la relation de Chasles, la construction des sommes et différences de vecteurs, le produit par un réel et les conséquences de la colinéarité, restent identiques dans l'espace et dans le plan.

Le critère de colinéarité dans le plan ne fonctionne plus dans l'espace (il y a trois coordonnées et pas deux) mais il suffit de prouver que les coordonnées des deux vecteurs sont proportionnelles pour prouver la colinéarité.

**Démonstration**

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} =$

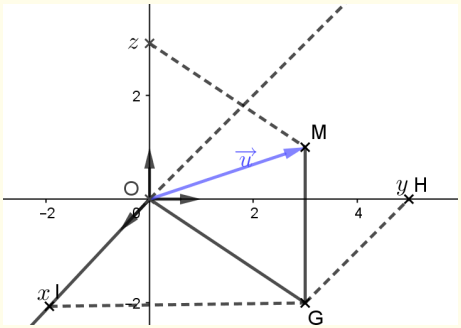
donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

Si $I$ est le milieu de $[AB]$ alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
On a donc :

$\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_B - x_I \\ y_B - y_I \\ z_B - z_I \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$

Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ci-dessous est orthonormé.




Dans le triangle $OGI$ rectangle en $H$, d'après le théorème de Pythagore :

$$OG = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Dans le triangle $OGM$ rectangle en $G$, d'après le théorème de Pythagore :

$$OM = \sqrt{OG^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Donc :

$$\| \vec{u} \| = \sqrt{x_{\vec{u}}^2 + y_{\vec{u}}^2 + z_{\vec{u}}^2}$$

**Exemples :**
L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On note $A(-2;1;3)$, $B(3;-1;-2)$, $C(1;1;-1)$ et $D(6;-1;-6)$.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \\ z_D - z_C \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

On a donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et ainsi $ABDC$ est un parallélogramme.

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} =$

Si $I$ est le milieu de $[AB]$ alors $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$ donc $I(\dots ; \dots ; \dots)$.

**Propriété 2 – Coordonnées de somme, différence et produit par un réel**

On note $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow x = y = z = 0$$

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \Leftrightarrow x = x' \text{ et } y = y' \; z = z'$$

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \\ z - z' \end{pmatrix} \text{ et } \lambda\,\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$$

**Démonstration**

▷ Comme les coordonnées d'un point ou d'un vecteur sont uniques alors les deux premières propriétés sont évidentes.

$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}) + (x'\,\overrightarrow{i} + y'\,\overrightarrow{j} + z'\,\overrightarrow{k})$
$=$

$\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = (x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}) - (x'\,\overrightarrow{i} + y'\,\overrightarrow{j} + z'\,\overrightarrow{k})$
$=$

$\lambda\,\vec{u} = \lambda(x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k})$
$=$

**Exemple :**
L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On note $A(-2;1;3)$, $B(3;-1;-2)$, $C(1;0;-1)$, $D(6;-1;1)$ et $\vec{u} = 2\,\overrightarrow{AB} - 3\,\overrightarrow{CD}$.
$\vec{u} = 2\,\overrightarrow{AB} - 3\,\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$.

**Définition 1 – Vecteurs colinéaires**

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel $t$ tel que :

$$\vec{u} = t\,\vec{v}$$

**Exemple :**
$\vec{u}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\vec{v} = \dots\dots\dots\ \vec{u}$ ou $\vec{u} = \dots\dots\dots\ \vec{v}$.

**Définition 2 – Combinaison linéaire de vecteurs**

On note **combinaison linéaire** de vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, ... $\vec{u}_n$ tout vecteur de la forme :

$$\alpha_1\,\vec{u}_1 + \alpha_2\,\vec{u}_2 + \dots + \alpha_n\,\vec{u}_n$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont des réels

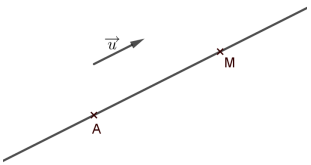
**Exemples :**
▷ $2\,\vec{u} + 3\,\vec{v}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

▷ $ABC$ est un triangle et $I$ le milieu de $[BC]$ alors $\overrightarrow{AI}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
Preuve : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}$ or $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 0$ donc $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

## 2. Droites et plans de l'espace

**Définition 3 – Droites de l'espace**

Une droite $(D)$ passant par $A$ et de direction $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est l'ensemble des points $M$ tels que $\overrightarrow{AM} = t \times \vec{u}$ où $t \in \mathbb{R}$ ou tels que $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\vec{u}$.




**Remarque :** Tout vecteur colinéaire à $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de $(D)$.

**Définition 4 – Droites parallèles**

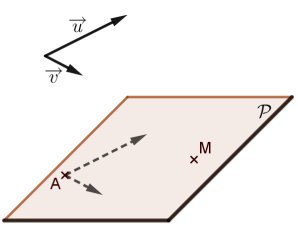
Deux droites $(D)$ et $(D')$ sont parallèles lorsque leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

**Définition 5 – Droites orthogonales**

Deux droites $(D)$ et $(D')$ sont orthogonales lorsque leurs vecteurs directeurs translatés en un même point sont orthogonaux.

**Définition 6 – Plans de l'espace**

Un plan $\mathscr{P}$ passant par $A$, de directions $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ est l'ensemble des points $M$ tels que $\overrightarrow{AM} = t \times \vec{u} + t' \times \vec{v}$ où $t, t' \in \mathbb{R}$ ou tels que $\overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.




**Définition 7 – Vecteur normal à un plan**

Un vecteur $\vec{n}$ est **normal** à un plan $\mathscr{P}$ s'il est orthogonal à tous les vecteurs du plan et donc à deux vecteurs non colinéaires du plan.

**Définition 8 – Vecteurs coplanaires**

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires (dans un même plan) si il existe $t \in \mathbb{R}^*$ et $t' \in \mathbb{R}^*$ tels que

$$\vec{u} = t\,\vec{v} + t'\,\vec{w}$$

**On dira dans ce cas que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont liés.**

**Définition 9 – Points coplanaires**

$A$, $B$, $C$ et $D$ sont coplanaires si $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont liés et donc il existe $t \in \mathbb{R}^*$ et $t' \in \mathbb{R}^*$ tels que :

$$\overrightarrow{AB} = t\,\overrightarrow{AC} + t'\,\overrightarrow{AD}$$

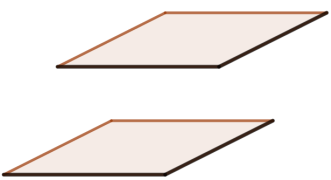
**Définition 10 – Vecteurs libres**

On dit que des vecteurs sont libres lorsqu'ils ne sont pas liés et donc qu'il n'existe aucune combinaison linéaire de ces vecteurs qui donne l'un d'eux.
**Exemple :** on dit que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont libres si $\alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v} + \gamma\,\vec{w} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

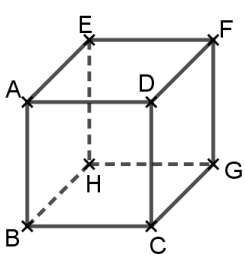
## 3. Position relative entre droites et plans

**Définition 11 – Plans parallèles**

Si deux plans sont parallèles alors un vecteur normal de l'un est colinéaire à un vecteur normal de l'autre.



**Exemple :**

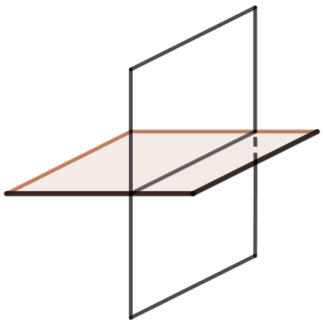



▷ Les plans $(AEF)$ et $(HBC)$ sont parallèles.

**Définition 12 – Plans orthogonaux**

Deux plans sont perpendiculaires si un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.

**Exemple :**



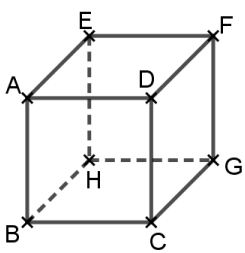
**Définition 13 – Droites perpendiculaires**

Deux droites $(D)$ et $(D')$ sont perpendiculaires si elles sont dans un même plan (coplanaires) et si leurs vecteurs directeurs translatés en un même point sont orthogonaux.

**Définition 14 – Droites sécantes**

Deux droites sont sécantes si elles sont coplanaires et non parallèles.

**Exemples :**




▷ Les plans $(ADC)$ et $(DFG)$ sont .....
▷ Les droites $(EH)$ et $(DC)$ sont .....
▷ Les droites $(EH)$ et $(HG)$ sont .....
▷ Les droites $(EH)$ et $(BC)$ sont .....
▷ La droite $(EH)$ est .....au plan $(HGC)$.
▷ La droite $(EF)$ est .....au plan $(HBC)$.
▷ La droite $(EB)$ est .....au plan $(BCG)$.