CHAPITRE 11

LOI DES GRANDS NOMBRES

La loi des grands nombres est un résultat fondamental du calcul des probabilités. Elle était connue dès le XVIIIe siècle. En théorie des probabilités, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est une inégalité de concentration permettant de montrer qu'une variable aléatoire prendra avec une grande probabilité une valeur relativement proche de son espérance. Ce résultat s'applique dans des cas très divers, nécessitant la connaissance de l'espérance et de la variance, et permet de démontrer la loi faible des grands nombres.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est démontrée par Jules Bienaymé en 1853. Elle est redécouverte par Tchebychev en 1867, qui la popularisa notamment en en faisant grand usage pour démontrer une loi faible des grands nombres.

Les contenus du chapitre

▷ Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Pour une variable aléatoire X d'espérance μ et de variance V, et quel que soit le réel strictement positif δ, $P\left(\left|X-\mu\right| \geq \delta\right) \leq \dfrac{V(X)}{\delta^2}$.

▷ Inégalité de concentration. Si M_n est la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V, alors pour tout $\delta > 0$, $P\left(\left|M_n-\mu\right| \geq \delta\right) \leq \dfrac{V}{n\delta^2}$.

▷ Loi des grands nombres.

Les capacités attendues du chapitre

▷ Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour définir une taille d'échantillon en fonction de la précision et du risque choisi.

Cours

1. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Propriété 1 – Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire d'espérance $\mu = E(X)$, alors quel que soit le réel strictement positif δ,

$$P(|X| \geq \delta) \leq \frac{E(X^2)}{\delta^2}$$

Démonstration

Cette démonstration n'est pas à connaître car elle utilise le théorème de transfert qui dit que pour une fonction continue, $E(f(X)) = \sum_{i=1}^{n} f(k)P(X = k)$.

On note δ un nombre strictement positif réel.

$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} k \times P(X = k)$ donc :

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} k^2 P(X = k)$$

On note $I = \{k \text{ tel que } |k| \geq \delta\}$, alors :

$$E(X^2) = \sum_{k \in I} \ldots\ldots\ldots P(X = \ldots\ldots) + \sum_{k \notin I} k^2 P(X = k)$$

or pour tout $k \in I$, $k^2 P(X = k) \geq \delta^2 P(X = k)$ et $\sum_{k \notin I} k^2 P(X = k) \geq 0$

donc $E(X^2) \geq \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots \sum_{k \in I} P(X = k) = \ldots\ldots P(|X| \geq \delta)$

ainsi

$P(|X| \geq \delta) \leq \ldots\ldots\ldots\ldots$

Propriété 2 – Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire d'espérance $\mu = E(X)$ et de variance $V(X)$, alors quel que soit le réel strictement positif δ,

$$P\left(\left|X - \mu\right| \geq \delta\right) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$$

Démonstration

Cette démonstration n'est pas à connaître car elle utilise le théorème de transfert qui dit que pour une fonction continue, $E(f(X)) = \sum_{i=1}^{n} f(k)P(X = k)$.

On note δ un nombre strictement positif réel.
On note $Y = X - \mu$ alors d'après l'inégalité de Markov, pour tout $\delta > 0$,

$$P(|Y| \geq \delta) \leq \frac{E(Y^2)}{\delta^2}$$

or $E(Y^2) = E((X-\mu)^2) = E((X - E(X)^2) = V(X)$ donc pour tout $\delta > 0$,

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$$

2. Inégalité de concentration

Propriété 3 – Inégalité de concentration

Soit $M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ où les X_i sont des variables aléatoires indépendantes d'espérance μ et de variance V, alors quel que soit le réel strictement positif δ,

$$P\left(\left|M_n - \mu\right| \geq \delta\right) \leq \frac{V(X)}{n\delta^2}$$

Démonstration

On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire M_n.
$E(M_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ et par linéarité de l'espérance :

$E(M_n) =$

De plus

$$V(M_n) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

et par les formules de l'espérance pour une somme de variables aléatoires indépendantes :

$V(M_n) =$

On a donc d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P\left(\left|M_n - \mu\right| \geq \delta\right) \leq \frac{\frac{V(X)}{n}}{\delta^2} = \frac{V(X)}{n\delta^2}$$

3. Loi des grands nombres

Propriété 4 – loi des grands nombres

Loi faible des grands nombres :
soient X_1, X_2, ..., X_n des variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi d'espérance μ alors pour tout $\delta > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\left|M_n - \mu\right| \geq \delta\right) = 0$$

Loi forte des grands nombres (admis) :
soient X_1, X_2, ..., X_n des variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi d'espérance μ alors,

$$P\left(\lim_{n \to +\infty} M_n = \mu\right) = 1$$

Cela se traduit par le fait que si on répète un grand nombre de fois une même expérience aléatoire, qui a comme résultat une valeur numérique, alors la moyenne des résultats obtenus tend à se rapprocher de l'espérance mathématique de l'expérience.
On peut aussi en déduire que la moyenne expérimentale tend à se rapprocher de la moyenne probabiliste, donc de l'espérance.

Démonstration

Loi faible des grands nombres :
On utilise pour cela l'inégalité de concentration et le théorème d'encadrement.
Pour tout réel strictement positif δ, $0 \leq P\left(\left|M_n - \mu\right| \geq \delta\right) \leq \dfrac{V(X)}{n\delta^2}$
or $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{V(X)}{n\delta^2} = \ldots\ldots$ donc par encadrement : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P\left(\left|M_n - \mu\right| \geq \delta\right) = \ldots\ldots.$

Exemples :
1) Lorsqu'on lance un très grand nombre de fois un dé non pipé, la fréquence d'apparition du 5 tend vers $\dfrac{1}{6}$.
1) Lorsqu'on lance un très grand nombre de fois une pièce de monnaie non pipée, la fréquence d'apparition de la face pile tend vers $\dfrac{1}{2}$.