CHAPITRE 10

SOMME DE VARIABLES ALÉATOIRES

La notion de variable aléatoire est née en même temps que le calcul des probabilités. C'est au cours du XVIIIe siècle qu'ont été énoncées la plupart des propriétés d'une variable aléatoire.
Les origines de la notion d'espérance mathématique remontent à Pascal (1623-1662).

Les contenus du chapitre

▷ Somme de deux variables aléatoires. Linéarité de l'espérance : $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$ et $E(aX) = aE(X)$.

▷ Dans le cadre de la succession d'épreuves indépendantes, exemples de variables indépendantes X,Y et relation d'additivité $V(X+Y) = V(X)+V(Y)$. Relation $V(aX) = a^2V(X)$.

▷ Application à l'espérance, la variance et l'écart-type de la loi binomiale.

▷ Echantillon de taille n d'une loi de probabilité : liste $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de variables indépendantes identiques suivant cette loi. Espérance, variance, écart-type de la somme $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ et de la moyenne $M_n = \dfrac{S_n}{n}$.

Les capacités attendues du chapitre

▷ Représenter une variable comme somme de variables aléatoires plus simples.

▷ Calculer l'espérance d'une variable aléatoire, notamment en utilisant la propriété de la linéarité.

▷ Calculer la variance d'une variable aléatoire, notamment en l'exprimant comme somme de variables aléatoires indépendantes.

Cours

1. Définitions et notations

Rappel : une variable aléatoire X est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.

$$X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$$

$\{X = k\}$ est l'ensemble des évènements élémentaires ω de Ω tels que $X(\omega) = k$

Définition 1 – Somme de variables aléatoires réelles

On note X et Y deux variables aléatoires réelles.
On note $X + Y$ la somme des variables aléatoires X et Y pour tout $\omega \in \Omega$,

$$(X + Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$$

De plus si on nomme pour $i \in \{1, 2, \dots n\}$, les couples de réels (x_i, y_j) tels que $x_i + y_j = k$ alors :

$$\begin{aligned}
&\{X + Y = k\} \\
&= \big(\{X = x_1\} \cap \{Y = y_1\}\big) \bigcup \big(\{X = x_2\} \cap \{Y = y_2\}\big) \bigcup \dots \bigcup \big(\{X = x_n\} \cap \{Y = y_n\}\big) \\
&= \bigcup_{x_i + y_i = k} \big(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_i\}\big)
\end{aligned}$$

Exemples :
▷ On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où l'on a obtenu « Face » après avoir lancé 3 fois une pièce. Alors on peut écrire $X = X_1 + X_2 + X_3$ où X_1 (respectivement X_2, X_3) est la variable aléatoire qui vaut 1 si on a obtenu « Pile » au 1er (respectivement 2e et 3e) lancer et 0 sinon.

▷ Dans une population on choisit au hasard un individu et on regarde si cet individu est malade ou pas. On note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si l'individu choisi au $i^{\text{ème}}$ tirage est malade et 0 sinon.
On note $X = X_1 + X_2 + \dots + X_{1000}$ alors X compte le nombre d'individus malades dans un population de taille 1000.

Propriété 1 – Somme de variables aléatoires réelles

On note X et Y deux variables aléatoires réelles.
On note $X + Y$ la somme des variables aléatoires X et Y
et pour tout $\omega \in \Omega$,

$$(X + Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$$

alors

$$P(X + Y = k) = \sum_{x_i + y_i = k} P\big(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_i\}\big)$$

ou

$$P(X+Y=k) = \sum_{x_i+y_i=k} P(\{X=x_i\}) \times P_{\{X=x_i\}}\left(\{Y=y_i\}\right)$$

Démonstration

Pour $k \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
&P(X+Y=k)\\
&= P\left(\left(\{X=x_1\}\cap\{Y=y_1\}\right)\bigcup\left(\{X=x_2\}\cap\{Y=y_2\}\right)\bigcup\ldots\bigcup\left(\{X=x_n\}\cap\{Y=y_n\}\right)\right)\\
&= P\left(\bigcup_{x_i+y_i=\ldots\ldots}\left(\{X=\ldots\ldots\}\cap\{Y=\ldots\ldots\}\right)\right)
\end{aligned}$$

Les évènements $\{X=x_i\}\cap\{Y=y_i\}$ sont disjoints, donc la probabilité de l'union devient une somme de probabilités et :

$$\begin{aligned}
&P(X+Y=k)\\
&= P\left(\{X=x_1\}\cap\{Y=y_1\}\right)+P\left(\{X=x_2\}\cap\{Y=y_2\}\right)+\ldots+P\left(\{X=x_n\}\cap\{Y=y_n\}\right)\\
&= \sum_{x_i+y_i=\ldots\ldots} P\left(\{X=\ldots\ldots\}\cap\{Y=\ldots\ldots\}\right)
\end{aligned}$$

de plus comme $P\left(\{X=x_i\}\cap\{Y=y_i\}\right) = P(\{X=x_i\}) \times P_{\{X=x_i\}}\left(\{Y=y_i\}\right)$
alors :

$$P(X+Y=k) = \sum_{x_i+y_i=\ldots\ldots} P(\{X=\ldots\ldots\}) \times P_{\{X=\ldots\ldots\}}\left(\{Y=\ldots\ldots\}\right)$$

Propriété 2 – Somme de variables aléatoires réelles indépendantes

On note X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes.
On note $X+Y$ la somme des variables aléatoires X et Y
pour tout $\omega \in \Omega$,

$$(X+Y)(\omega) = X(\omega)+Y(\omega)$$

alors

$$P(X+Y=k) = \sum_{x_i+y_i=k} P(\{X=x_i\}) \times P\left(\{Y=y_i\}\right)$$

Démonstration

Pour $k \in \mathbb{R}$,
comme X et Y sont indépendantes alors

$$P\left(\{X=x_i\}\cap\{Y=y_i\}\right) = P(\{X=x_i\}) \times P\left(\{Y=y_i\}\right)$$

donc :

$$P(X+Y=k) = \sum_{x_i+y_i=\ldots\ldots} P(\{X=\ldots\ldots\}) \times P(\{Y=\ldots\ldots\})$$

2. Espérance d'une somme de variables aléatoires réelles

Rappel : l'espérance est donné par

$$E(X) = \sum_{k\in X(\Omega)} k \times P(X=k)$$

Cela représente ce que l'on peut espérer obtenir en moyenne en faisant un grand nombre de fois l'expérience.

Propriété 3 – Linéarité de l'espérance de $X+Y$

On note X et Y deux variables aléatoires réelles et $a \in \mathbb{R}$, alors :

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \text{ et } E(aX) = aE(X)$$

Démonstration

$E(X) = \sum_{x_i\in X(\Omega)} x_i P(X=x_i)$

or d'après la formule de probabilités totales :

$$P(X=x_i) = \sum_{y_j\in Y(\Omega)} P\big((X=\ldots\ldots)\cap(Y=y_j)\big)$$

donc :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x_i\in X(\Omega)} \ldots\ldots \sum_{y_j\in Y(\Omega)} P\big((X=\ldots\ldots)\cap(Y=y_j)\big) \\ &= \sum_{x_i\in X(\Omega)} \sum_{y_j\in Y(\Omega)} \ldots\ldots P\big((X=\ldots\ldots)\cap(Y=y_j)\big) \end{aligned}$$

de même :

$$E(Y) = \sum_{x_i\in X(\Omega)} \sum_{y_j\in Y(\Omega)} \ldots\ldots P((X=x_i)\cap(Y=\ldots\ldots))$$

donc :

$$\begin{aligned} E(X)+E(Y) &= \sum_{x_i\in X(\Omega)} \sum_{y_j\in Y(\Omega)} (\ldots\ldots\ldots\ldots) P\big((X=x_i)\cap(Y=y_j)\big) \\ &= \sum_{k\in(X+Y)(\Omega)} k \times \sum_{x_i+y_j=\ldots\ldots} P\big((X=x_i)\cap(Y=y_j)\big) \\ &= \sum_{k\in(X+Y)(\Omega)} \ldots(X+Y=k) = E(\ldots\ldots\ldots\ldots) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$E(X+Y) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$E(aX) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} \ldots\ldots\ldots P(aX = ax_i) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} \ldots\ldots\ldots P(X = \ldots\ldots)$$
$$= a \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i P(X = \ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Conclusion :

$$E(aX) = \ldots\ldots\ldots$$

Exemple :
▷ Si $(X \hookrightarrow B(0,25))$ et$(Y \hookrightarrow B(0,05))$ alors :

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \ldots\ldots\ldots$$

et

$$E(3(X+Y)) = 3E(X+Y) = \ldots\ldots\ldots$$

3. Variance d'une somme de variables aléatoires réelles indépendantes

Rappel : la variance est donnée par :

$$V(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} (k - E(X))^2 \times P(X = k) = E(X^2) - (E(X))^2$$

et l'écart-type est donné par :

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

Propriété 4 – Linéarité de la variance de $X+Y$

On note X et Y deux variables aléatoires réelles <u>indépendantes</u> et $a \in \mathbb{R}$, alors :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)\text{(admis) et } V(aX) = a^2 V(X)$$

Démonstration

$$V(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i)$$

$$V(aX) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} (\ldots\ldots\ldots\ldots)^2 P(aX = ax_i) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} (\ldots\ldots\ldots\ldots)^2 P(X = \ldots\ldots)$$
$$= \sum_{x_i \in X(\Omega)} a^2 (\ldots\ldots\ldots\ldots)^2 P(X = \ldots\ldots) = a^2 \sum_{x_i \in X(\Omega)} (\ldots\ldots\ldots\ldots)^2 P(X = \ldots\ldots)$$
$$= \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Conclusion :

$$V(aX) = a^2 V(X)$$

Exemples :
▷ Si $X \hookrightarrow B(0.32)$ et $Y \hookrightarrow B(0.16)$ indépendantes alors :
$V(X+Y) = V(X) + V(Y) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

▷ Si $X \hookrightarrow B(0.32)$ et $Y \hookrightarrow B(0.32)$ indépendantes alors :
$V(X+Y) = V(X) + V(Y) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Propriété 5 – Somme de variables aléatoires suivant la même loi de Bernoulli

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p alors :

$$\left(Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \hookrightarrow B(n,p)\right)$$

Démonstration

Une **expérience** (ou épreuve) **de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui contient seulement deux issues. Une des issues est nommée S : « Succès » et l'autre E : « Echec ». On note p la probabilité de S et $1-p$ la probabilité de E.
On rappelle que $S = \{X = 1\}$, $E = \{X = 0\}$, $p = P(X = 1)$ et $1 - p = P(X = 0)$.

On répète cette épreuve de façon unique et indépendante n fois donc on définit dans ce cas $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès après ces n épreuves indépendantes.
On a alors

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

et on note :

$$A = \overbrace{(X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap \ldots \cap (X_k = 1)}^{\text{(k succès)}}$$
$$\cap \overbrace{(X_{k+1} = 0) \cap (X_{k+2} = 0) \cap \ldots \cap (X_n = 0)}^{\text{(n-k échecs)}}$$

Or tous les évènements sont incompatibles donc :

$$P(A) = \left(\overbrace{p \times p \times \ldots \times p}^{\text{(k succès)}}\right) \times \left(\overbrace{(1-p) \times (1-p) \times \ldots \times (1-p)}^{\text{(n-k échecs)}}\right)$$
$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On a donc :

$$P(X = k) = (\text{nbre de branches contenant k succès}) \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Or il y a autant de branches contenant k succès parmi n expériences que de façons de choisir k objets parmi n, donc :

$$P(X = k) = \binom{k}{n} \times p^k \times (1-k)^{n-k}$$

Propriété 6 – Expérance, variance et écart-type de la loi binomiale

Si $\left(X \hookrightarrow B(n,p)\right)$ alors $E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$ et $\sigma_X = \sqrt{np(1-p)}$.

Démonstration

Si $X \hookrightarrow B(n,p)$ alors il existe X_1, X_2, X_3, …, X_n des variables aléatoires réelles indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p et de plus :

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

D'après la linéarité de l'espérance et de la variance :

▷ $E(X) =$.

▷ $V(X) =$.

▷ $\sigma_X =$

Propriété 7 – Expérance, variance et écart-type d'une moyenne

Si $\left(X \hookrightarrow B(n,p)\right)$ alors $E\left(\dfrac{X}{n}\right) = p$, $V\left(\dfrac{X}{n}\right) = \dfrac{p(1-p)}{n}$ et $\sigma_{\left(\frac{X}{n}\right)} = \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$.

Démonstration

Si $\left(X \hookrightarrow B(n,p)\right)$ alors il existe X_1, X_2, X_3, …, X_n des variables aléatoires réelles indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p et

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

D'après la linéarité de l'espérance et de la variance :
$E(\overline{X}) =$

$V(\overline{X}) =$

▷ $\sigma_{\overline{X}} =$

Exemple :
Si X suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,05$ alors :

▷ E(X)=

▷ V(X)=

▷ $\sigma_X =$