Equations et inégalités.

Classe de seconde

Cours de Vincent Obaton

“Les mathématiques sont un jeu que l'on exerce selon des règles simples en manipulant des symboles ou des concepts qui n'ont en soi, aucune importance particulière. ” (David Hilbert)

Année 2019-2020

Liste des savoirs et savoir-faire du chapitre :

CODES	INTITULES	Bilan		
		A	EA	NA
CH0501	Sur des cas simples de relations entre variables (U=RI, d=vt, S=πR^2 ...), exprimerune variable en fonction des autres. Cas d’une relation ax+by=c.			
CH0502	Comparer deux quantités en utilisant leur différence, ou leur quotient dans le cas positif.			
CH0503	Modéliser un problème par une équation ou inéquation.			
CH0504	Résoudre des équations.			
CH0505	Résoudre des inéqautions du premier degré.			

Compétences dans tous les chapitres :

INTITULE	Bilan		
	A	EA	NA
Chercher			
Modéliser			
Représenter			
Calculer			
Raisonner			
Communiquer			

EQUATIONS ET INEGALITES

Lycée Stendhal • Classe de seconde• Vincent Obaton

COURS

Définition 1 – Equations équivalentes

▷ On dit que deux équations (ou inéquations) sont équivalentes (et on utilisera le symbole ⇔) lorsqu'elles ont les mêmes solutions.

Exemples
▷ Les deux équations $2x+4=0$ et $2x=-4$ sont équivalentes.
On écrira $2x+4=0 \Leftrightarrow 2x=-4$.

Propriété 1 – Equations équivalentes

▷ Deux équations (ou inéquations) sont équivalentes si on passe de l'une à l'autre en ajoutant ou en enlevant à chacun des deux membres un même nombre. Ou si on multiplie ou on divise chacun des deux membres par un même nombre non nul ou en factorisant ou développant les expressions littérales d'un ou des deux membres.

Exemples
▷ $2(x+3)-2=0 \Leftrightarrow 2x+6-2=0 \Leftrightarrow 2x+4=0$

▷ $4x+x^2=0 \Leftrightarrow 4\times x+x\times x=0 \Leftrightarrow x(4+x)=0$
Si on ne travaille pas par équivalence on doit vérifier que la (ou les) solution(s) trouvée(s) pour la dernière équation, est bien (sont bien) solution(s) aussi de la première. Il est donc préférable de travailler par équivalence afin d'éviter cette vérification.
Exemple sans équivalence
Si $2(x+1)-4=0$ alors $2x+2-4=0$ alors $2x-2=0$ alors $2x=2$ donc $x=1$
Vérification : $2(1+1)-4=2\times2-4=4-4=0$ donc l'équation admet 1 comme solution.
Exemple avec équivalence

$2(x+1)-4=0 \Leftrightarrow$

donc l'équation admet ..... comme solution et on écrira $S=\{....\}$

1. Equations polynomiales du premier degré

Définition 2 – Equation polynomiale du premier degré

Une équation polynomiale du premier degré est une équation qui peut toujours se ramener, par des opérations mathématiques, à une équation de la forme $ax+b=0$.

Exemples

▷ $3x - 4 = 0$

▷ $4 - 5x = 2x - 3$

▷ $4 - 5(2x + 1) = 3(x - 1) + 2x$

▷ $(3x - 1)(3 - x) = (x - 2)(4 - 3x)$

▷ $(x - 3)^2 - x^2 = 0$

Méthode 1 – Résolution des équations polynomiales du premier degré

- Développer les deux membres de l'équation.
- Réduire les deux membres de l'équation.
- Faire apparaître les termes en x d'un côté et le reste de l'autre.
- Déterminer la valeur de x.
- Donner l'ensemble des solutions.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4 - 5(2x + 1) = 3(x - 1) + 2x$

2. Equations polynomiales de degré supérieur à 1

Les équations produit nul

Définition 3 – Equation produit nul

Une équation produit nul est de la forme $A \times B = 0$.

Méthode 2 – Résolution des équations produit nul

▷ $A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$

▷ $A \times B \neq 0 \Leftrightarrow A \neq 0$ et $B \neq 0$

Les équation du genre $x^2 = a$ ($a > 0$)

Propriété 2 – Solution de $x^2 = a$ ($a > 0$)

▷ $x^2 = a(a > 0) \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$

Définition 4 – Equation polynomiale de degré spérieur à 1

Une équation polynomiale de degré spérieur à 1 est une équation polynomiale qui ne peut pas se ramener, par des opérations mathématiques, à une équation de la forme $ax + b = 0$.

Exemples

▷ $3x^2 - 4 = 0$

▷ $4 - 5x^3 = 2x^2 - 3$

▷ $(3x - 1)(2x + 1) = 0$

▷ $(3x - 1)(3 - 2x) = (x - 2)(4 - 3x)$

▷ $(x - 3)^2 - 16 = 0$

Méthode 3 – Résolution des équations de degré supérieur à 1

- Soustraire les deux membres en utilisant la propriété

$$A = B \Leftrightarrow A - B = 0$$

- Factoriser le membre non nul.
- Réduire la factorisation.
- Appliquer la règle des équations produit nul.
- Donner l'ensemble des solutions.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x - 1)^2 = (2x + 3)^2$

3. Equations rationnelles

Définition 5 – Equation rationnelle

Une équation rationnelle est une équation comportant des divisions de polynômes où l'inconnue apparaît au dénominateur.

Exemples

▷ $x = \frac{1}{x}$

▷ $1 - \frac{2}{x+5} = \frac{x+3}{x-1}$

▷ $\frac{x+1}{x-2} - \frac{x-3}{x+1} = \frac{3x}{x^2-x-1}$

Ensemble d'étude

Définition 6 – Ensemble d'étude d'une équation

L'ensemble d'étude d'une équation est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles l'équation existe.

Exemple

▷ L'ensemble d'étude de $x^2+3x+1=0$ est $E=\mathbb{R}$.

▷ L'ensemble d'étude de $\frac{4x}{x-1}=3$ est $E=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Propriété 3 – Propriétés sur les fractions

▷ $\frac{A}{B}$ existe si et seulement si $B \neq 0$

▷ $\frac{A}{B}=0 \Leftrightarrow A=0$

▷ $\frac{A}{B}=1 \Leftrightarrow A=B$

Il faut commencer par chercher l'ensemble d'étude de l'équation rationnelle.

On cherche donc pour quelles valeurs de x réelles, l'expression $\frac{A}{B}$ existe et donc les valeurs de x pour lesquelles le dénominateur $B \neq 0$.

Exemple

L'équation $1-\frac{2}{x+5}=\frac{x+3}{x-1}$ existe si et seulement si $x+5\neq 0$ et $x-1\neq 0$

donc pour $x\neq -5$ et $x \neq 1$.

On va donc résoudre l'équation sur $E=\mathbb{R}\setminus\{-5;1\}$.

Méthode 4 – Résolution des équations rationnelles

- On commence par chercher l'ensemble d'étude de l'équation.
- On réduit les deux membres pour obtenir une égalité de deux expressions rationnelles en mettant au même dénominateur.
- On effectue le produit en croix : $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D} \Leftrightarrow A \times D = B \times C$
- Résoudre l'équation polynomiale obtenue.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $1 - \dfrac{2}{x+5} = \dfrac{x+3}{x-1}$

4. Opérations sur les inégalités

Ajouter un réel à une inégalité :

Propriété 4 – Ajouter un réel à une inégalité

Soit $c \in \mathbb{R}$ alors :
▷ Si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$
▷ Si $a < b$ alors $a + c < b + c$
▷ Si $a \geq b$ alors $a + c \geq b + c$
▷ Si $a > b$ alors $a + c > b + c$

Exemple
Si $x \leq y$ alors $x + 3$.......$y + 3$.

Retrancher (enlever) un réel à une inégalité :

Propriété 5 – Retrancher un réel à une inégalité

Soit $c \in \mathbb{R}$ alors :
▷ Si $a \leq b$ alors $a - c \leq b - c$
▷ Si $a < b$ alors $a - c < b - c$
▷ Si $a \geq b$ alors $a - c \geq b - c$
▷ Si $a > b$ alors $a - c > b - c$

Exemple
Si $x \leq y$ alors $x - 3$.......$y - 3$.

Multiplier une inégalité par un réel :

Propriété 6 – Produit d'une inégalité par un réel positif

Soit $c \in \mathbb{R}^+$ (donc c est positif), alors :
▷ Si $a \leq b$ alors $a \times c \leq b \times c$
▷ Si $a < b$ alors $a \times c < b \times c$
▷ Si $a \geq b$ alors $a \times c \geq b \times c$
▷ Si $a > b$ alors $a \times c > b \times c$

Exemple
Si $x \leq y$ alors $3x$......$3y$.

Propriété 7 – Produit d'une inégalité par un réel négatif

Soit $c \in \mathbb{R}^-$ (donc c est négatif), alors :
▷ Si $a \leq b$ alors $a \times c \geq b \times c$
▷ Si $a < b$ alors $a \times c > b \times c$
▷ Si $a \geq b$ alors $a \times c \leq b \times c$
▷ Si $a > b$ alors $a \times c < b \times c$

Exemple
Si $x \leq y$ alors $-3x......-3y$.

Diviser une inégalité par un réel :

Propriété 8 – Quotient d'une inégalité par un réel positif

Soit $c \in \mathbb{R}^{+*}$ (donc c est positif et non nul), alors :
- ▷ Si $a \leq b$ alors $\dfrac{a}{c} \leq \dfrac{b}{c}$
- ▷ Si $a < b$ alors $\dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$
- ▷ Si $a \geq b$ alors $\dfrac{a}{c} \geq \dfrac{b}{c}$
- ▷ Si $a > b$ alors $\dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$

Exemple
Si $x \leq y$ alors $\dfrac{x}{3}......\dfrac{y}{3}$.

Propriété 9 – Quotient d'une inégalité par un réel négatif

Soit $c \in \mathbb{R}^{*-}$ (donc c est négatif et non nul), alors :
- ▷ Si $a \leq b$ alors $\dfrac{a}{c} \geq \dfrac{b}{c}$
- ▷ Si $a < b$ alors $\dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$
- ▷ Si $a \geq b$ alors $\dfrac{a}{c} \leq \dfrac{b}{c}$
- ▷ Si $a > b$ alors $\dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$

Exemple
Si $x \leq y$ alors $-\dfrac{x}{3}......-\dfrac{y}{3}$.

Additionner deux inégalités :

Propriété 10 – Somme de deux inégalités

Soient a, b, a' ,b' des réels tels que $a \leq x \leq b$ et $a' \leq y \leq b'$, alors :

$$a + a' \leq x + y \leq b + b'$$

Exemple
Si $-2 \leq x \leq 5$ et $3 \leq y \leq 7$ alors $1......x + y......12$.

Méthode 5 – Comment encadrer $x - y$

On va utiliser le fait que $x - y = x + (-y)$.
Supposons que l'on connaisse un encadrement de x et un encadrement de y.
On commence par en déduire un encadrement de $-y$ en multipliant la deuxième inégalité par -1 puis on ajoute les deux inégalités, celle de x et celle de $-y$.
Si $a \leq x \leq b$ et $a' \leq y \leq b'$
alors $a \leq x \leq b$ et $-b'......-y \leq -a'$
donc $a - b'.....x - y......b - a'$.

Exemple
On suppose que $-1 \leq x \leq 2$ et que $-3 \leq y \leq 5$
On souhaite encadrer $4x - y + 2$
Sachant que $-1 \leq x \leq 2$ et $-3 \leq y \leq 5$
alors $-4......4x......8$ et que $-5...... -y......3$
donc $-9......4x - y......11$
et enfin $-7......4x - y + 2......13$

5. Inéquations polynomiales du premier degré

Définition 7 – Inéquation polynomiale du premier degré

Une inéquation polynomiale du premier degré est une inéquation qui peut toujours se ramener, par des opérations mathématiques, à une inéquation de la forme $ax + b \geq 0$ ou $ax + b \leq 0$ ou $ax + b > 0$ ou $ax + b < 0$.

Exemples
▷ $3x - 4 \leq 0$
▷ $4 - 5x > 2x - 3$
▷ $4 - 5(2x + 1) \geq 3(x - 1) + 2x$
▷ $(3x - 1)(3 - x) < (x - 2)(4 - 3x)$
▷ $(x - 3)^2 - x^2 \geq 0$

Méthode 6 – Résolution des inéquations polynomiales du premier degré

▷ Méthode de résolution des inéquations polynomiales de degré 1
- Développer les deux membres de l'inéquation.
- Réduire les deux membres de l'inéquation.
- Faire apparaître les termes en x d'un côté et le reste de l'autre.
- Déterminer les valeurs de x possibles.
- Donner l'ensemble des solutions.

Exemple
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $4 - 5(2x + 1) > 3(x - 1) + 2x$