Le calcul littéral

Classe de seconde

Cours de Vincent Obaton

"Quand on aime on ne compte pas… Ca tombe bien, je suis mauvaise en calcul !. "

Année 2019-2020

Liste des savoirs et savoir-faire du chapitre :

CODES	INTITULES	Bilan		
		A	EA	NA
CH0401	Effectuer des calculs numériques ou littéraux mettant en jeu des puissances, des racines carrées, des écritures fractionnaires.			
CH0402	Choisir la forumle la plus adaptée (fectorisée, développée et réduite) d'une expression en vue de la résolutoin d'un problème.			

Compétences dans tous les chapitres :

INTITULE	Bilan		
	A	EA	NA
Chercher			
Modéliser			
Représenter			
Calculer			
Raisonner			
Communiquer			

LE CALCUL LITTERAL

Lycée Stendhal • Classe de seconde• Vincent Obaton

COURS

1. Développement

Développer va nous servir à simplifier et réduire une expression littérale.
Lorsqu'il y a une multiplication devant une parenthèse, on distribue la multiplication à tous les termes de la parenthèse. On nomme cette opération **la distributivité**.

Propriété 1 – Distributivité

$$\triangleright\ \boxed{k\times}(a+b) = \boxed{k\times}a + \boxed{k\times}b$$

$$\triangleright\ \boxed{k\times}(a-b) = \boxed{k\times}a - \boxed{k\times}b$$

Méthode 1 – Développer avec un signe moins devant une parenthèse

De même lorsqu'il y a un signe $-$ devant une parenthèse, on distribue le signe moins (et donc on change le signe de **<u>tous</u>** les termes de la parenthèse).

Propriété 2 – Signe $-$ devant une parenthèse

$$\triangleright\ -(a+b-c) = -a-b+c$$

Lorsque deux parenthèses se multiplient on applique la distributivité autant de fois qu'il y a de termes dans une des parenthèses.

Par exemple pour $(x+2)\times(x-3)$ on applique la double distributivité :

$(x+2)\times(x-3) =$

Pour développer les expressions de la forme $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ ou $(a+b)(a-b)$ on utilise les identités remarquables dans le sens du développement.

Propriété 3 – Les identités remarquables pour développer

$\triangleright$ Pour tout a et b réels :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Exemples :

$(x+2)^2 =$

$(2x-3)^2 =$

$(3-x)(3+x) =$

Méthode 2 – Démontrer une égalité en développant

Pour démontrer que l'expression littérale A est égale à l'expression littérale B, il y a trois méthodes possibles :

1. On peut développer A pour obtenir B.
2. On peut développer B pour obtenir A.
3. On peut développer les deux expressions séparément pour obtenir la même expression.

Exemple :
On souhaite montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a

$$(x+2)(x-5) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}$$

2. Factorisation

On utilisera la factorisation dans de nombreux exercices comme pour simplifier des écritures rationnelles, résoudre des équations et des inéquations, simplifier des calculs, trouver le signe d'une différence ou enfin pour étudier l'extremum d'une fonction sur un intervalle.
Il y a deux méthodes pour factoriser une expression littérale. Celle où il y a des termes avec un facteur commun et celle où il y a une identité remarquable dans le sens de la factorisation.
Une expression littérale est formée de plusieurs termes. Il peut y avoir des facteurs communs dans chacun des termes. Lorsque ces facteurs communs existent on factorise en utilisant **la distributivité** dans le sens de la factorisation.

Propriété 4 – Factorisation avec un facteur commun

▷ Pour tout a, b et k réels :

$$\underline{k\times} a+\underline{k\times} b=\underline{k\times}(a+b)$$
$$\underline{k\times} a-\underline{k\times} b=\underline{k\times}(a-b)$$

Méthode 3 – Factoriser sans se tromper

Un conseil : souligner le facteur commun afin de repérer les termes qui seront dans la parenthèse qui suit la factorisation.

Exemples

▷ $x^2+2x=$

▷ $x^2+x=$

Factoriser revient en fait à diviser tous les termes par le facteur commun. On peut toujours factoriser par un nombre réel constant, par contre pour factoriser par une variable il faut que celle-ci soit un facteur commun apparent. Dans le cas contraire on risque d'avoir une division par 0. Il faudra dans ce cas donner les conditions pour que cette factorisation soit possible.

Exemple

$3x+5=$

Si $x\neq 0$ alors $3x+5=$

Dans le dernier exemple, la condition $x\neq 0$ est très importante car si $x=0$ cette factorisation est impossible.

Un exemple très souvent rencontré dans le calcul des "limites" en classe de première et terminale :

Si $x\neq 0$, $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1}=$

Méthode 4 – Factoriser avec un facteur commun non apparent

Dans certains cas, le facteur commun est caché et non apparent. Il faut donc commencer par le faire apparaître pour pouvoir continuer la factorisation. On peut dans certaines situations avoir besoin des propriétés suivantes :

Propriété 5 – Opposé d'une différence

▷ Pour tout a et b réels :

$$-(a-b)=+(-a+b)=+(b-a)$$
$$+(a-b)=-(-a+b)=-(b-a)$$

Exemples

▷ $(x+1)(x-2)-(2-x)(x+3)=$

▷ $(x+1)(x-2)-(2x-4)(x+3)=$

Pour factoriser une expression de la forme a^2-b^2, $a^2+2ab+b^2$ ou $a^2-2ab+b^2$ on utilise les identités remarquables dans le sens de la factorisation.

Propriété 6 – Les identités remarquables pour factoriser

▷ Pour tout a et b réels :

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$
$$a^2+2ab+b^2=(a+b)(a+b)$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)(a-b)$$

Exemple :

$x^2-6x+9=$

$4x^2+20x+25=$

$25x^2-9=$

Méthode 5 – Démontrer une égalité en factorisant

Comment démontrer une égalité en factorisant ?
Pour démontrer que l'expression littérale A est égale à l'expression littérale B il y a trois méthodes possibles :

1. On peut factoriser A pour obtenir B.
2. On peut factoriser B pour obtenir A.
3. On peut factoriser les deux expressions séparément pour obtenir la même expression.

Exemple :

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}=(x-2)(x+3=$$

3. Démonstrations

Propriété 7 – Les identités remarquables

Pour tout a et b réels, on a :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Démonstration

Il faut savoir utiliser les identités remarquables dans les deux sens.
Le sens du développement et le sens de la factorisation.

Exemples

▷ $(2x+3)^2 =$

▷ $16x^2 - 25 =$

Propriété 8 – Transformation sur les racines carrées

Pour tout a,b réels strictement positifs et x réel positif, on a :

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$\text{Si } a\neq b \text{ alors } \sqrt{a}+\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

‘

Propriété 9 – Produit des racines carrées

Quels que soient les réels positifs a, b on a $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.

Démonstration

Propriété 10 – Somme des racines carrées

Quels que soient les réels strictement positifs a, b on a $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

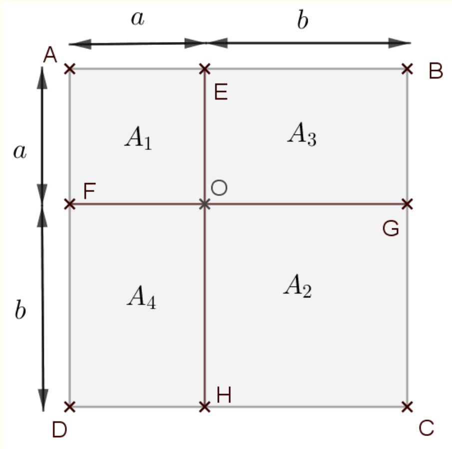
Propriété 11 – Le carré d'une somme

Montrer géométriquement que quels que soient les réels positifs

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Démonstration

On note $ABCD$ un carré de longueur $a+b$.



▷ Aire de $ABCD =$

▷ Aire de $ABCD =$