Géométrie plane

Classe de seconde

Cours de Vincent Obaton

“L'inspiration est nécessaire dans la géométrie, tout autant que dans la poésie. ”

Alexandre Pouchkine (Artiste, dramaturge, écrivain, poète, romancier du 18 ème)

Année 2019-2020

Liste des savoirs et savoir-faire du chapitre :

CODES	INTITULES	Bilan		
		A	EA	NA
CH0301	Résoudre des problèmes de géométrie plane sur des figures simples ou complexes (triangles, quadrilatères, cercle).			
CH0302	Calculer des longueurs, des angles, des aires et des volumes.			
CH0303	Calculer la distance entre deux points. Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.			
CH0304	Traiter des problèmes d'optimisation.			
CH0305	Représenter géométriquement des vecteurs.			
CH0306	Construire géométriquement la somme de deux vecteurs.			
CH0307	Calculer les coordonnées d'une somme de vecteurs, d'un produit d'un vecteur par un réel.			
CH0308	Caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité de vecteurs.			
CH0309	Résoudre des problèmes en utilisant la représentation la plus adaptée des vecteurs.			

Compétences dans tous les chapitres :

INTITULE	Bilan		
	A	EA	NA
Chercher			
Modéliser			
Représenter			
Calculer			
Raisonner			
Communiquer			

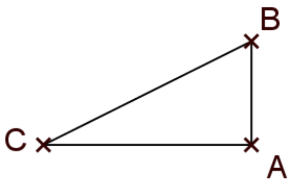
GEOMETRIE PLANE

Lycée Stendhal • Classe de seconde• Vincent Obaton

GÉOMÉTRIE PLANE

1. Quelques rappels du collège

Propriété 1 – Théorème de Pythagore



▷ **Théorème de Pythagore**

Si ABC est un triangle rectangle en A alors $BC^2 = BA^2 + AC^2$.

▷ **Réciproque du théorème de Pythagore**

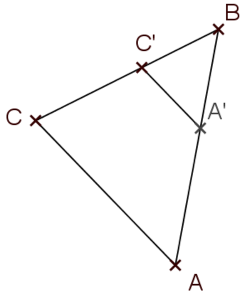
Si $BC^2 = BA^2 + AC^2$ alors le triangle ABC est rectangle en A.

▷ **Contraposée du théorème de Pythagore**

Si $BC^2 \neq BA^2 + AC^2$ alors le triangle ABC n'est pas rectangle en A.

Pythagore est un mathématicien et scientifique qui serait né aux environs de 580 av. J.-C. à Samos, une île de la mer Égée au sud-est de la ville d'Athènes. On pense qu'il est mort vers 495 av. J.-C., à l'âge de 85 ans.

Propriété 2 – Théorème de Thalès



▷ **Théorème de Thalès**
Si ABC est un triangle, $C' \in [BC]$, $A' \in [BA]$ et $(CA)//(C'A')$ alors

$$\frac{BC'}{BC} = \frac{BA'}{BA} = \frac{C'A'}{CA}$$

▷ **Réciproque du théorème de Thalès**

Si ABC est un triangle, $C' \in [BC]$, $A' \in [BA]$ et $\frac{BC'}{BC} = \frac{BA'}{BA}$ alors

$$(C'A')//(CA)$$

▷ **Contraposée du théorème de Thalès**

Si ABC est un triangle, $C' \in [BC]$, $A' \in [BA]$ et $\frac{BC'}{BC} \neq \frac{BA'}{BA}$ alors (CA) et $(C'A')$ ne sont pas parallèles.

Thalès de Milet, appelé **Thalès**, est un philosophe et savant mathématicien grec né vers -625 et mort vers -547 à Milet.
C'est le fondateur de l'école milésienne. On lui attribue de nombreux exploits, comme le calcul de la hauteur de la grande pyramide ou la prédiction d'une éclipse, ainsi que le théorème de Thalès.

Définition 1 – Coefficient de réduction et d'agrandissement

On dira que $k_r = \frac{BC'}{BC}$ est le **coefficient de réduction** pour passer du triangle ABC au triangle $A'BC'$.

On dira que $k_a = \frac{BC}{BC'}$ est le **coefficient d'agrandissement** pour passer du triangle $A'BC'$ au triangle ABC.

Propriété 3 – Agrandissement et réduction

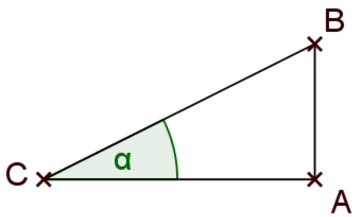
▷ Si les longueurs d'une figure dans le plan sont multipliées par un réel positif k alors l'aire de la figure est multipliée par k^2.

▷ Si les longueurs d'une figure dans l'espace sont multipliées par un réel positif k alors le volume de la figure est multiplié par k^3.

Démonstration

2. Trigonométrie dans le triangle

Définition 2 – Formules de trigonométrie



▷ Si ABC est un triangle rectangle en A alors :

$$\cos\alpha = \frac{\text{côté adjacent à } \alpha}{hypoténuse} = \frac{AC}{BC}$$

$$\sin\alpha = \frac{\text{côté opposé à } \alpha}{hypoténuse} = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{côté opposé à } \alpha}{\text{côté adjacent à } \alpha} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Propriété 4 – Valeurs exactes de trigonométrie

▷ Quelques valeurs exactes à connaître par coeur :

α	0	30	45	60	90
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\otimes$

Démonstration

Propriété 5 – Relation entre le cosinus et le sinus

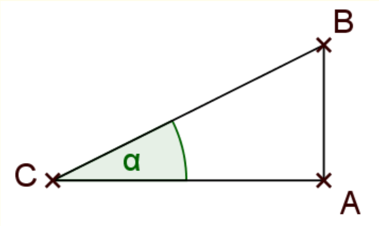
Soit ABC un triangle rectangle en A alors :

▷ $\cos^2\left(\widehat{ABC}\right) + \sin^2\left(\widehat{ABC}\right) = 1$

▷ $\cos^2\left(\widehat{ACB}\right) + \sin^2\left(\widehat{ACB}\right) = 1$

Démonstration

On nomme ABC un triangle rectangle en A et α la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BCA}$.



Montrons que $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$
D'après les formules de trigonométrie :

$\cos\alpha =$

et

$\sin\alpha =$

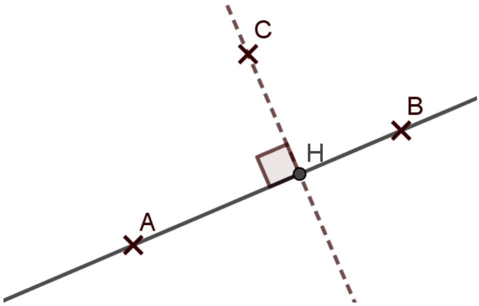
donc

$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) =$

3. Points, figures et droites particulières

Définition 3 – Projeté orthogonal

Soit (AB) une droite et un point C qui n'est pas sur la droite (AB). On nomme **projeté orthogonal de C sur la droite** (AB) le point H intersection de la droite (AB) avec la perpendiculaire à (AB) passant par C.

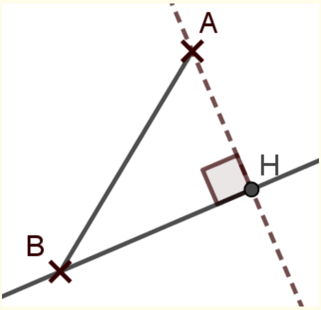


Propriété 6 – Projeté orthogonal et point le plus proche

Le projeté orthogonal du point A sur une droite (D) est le point de (D) le plus proche du point A.

Démonstration

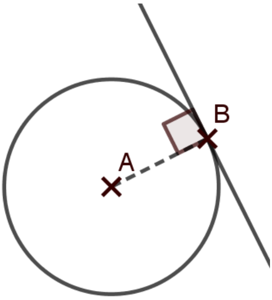
Soit (D) une droite et A un point qui n'est pas sur (D).
On note H le projeté orthogonal de A sur $[D)$



Pour tout point B quelconque de (D) :

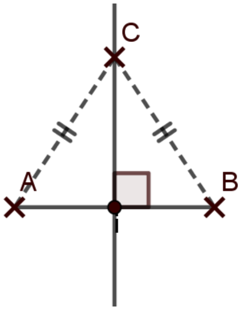
Définition 4 – Tangente à un cercle

Soit (C) un cercle de centre A. On place un point B sur (C). On nomme **tangente au cercle** (C) **au point** B la droite perpendiculaire au rayon $[AB]$ et passant par B.



Définition 5 – Médiatrice d'un segment

On nomme **médiatrice** d'un segment $[AB]$, la droite passant par le milieu de $[AB]$ et perpendiculaire à la droite (AB).

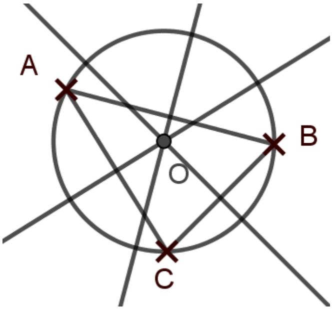


Propriété 7 – Médiatrice et équidistance

D est un point de la médiatrice de $[AB]$ si et seulement si $DA = DB$.
On dit que D est équidistant de A et de B et la médiatrice de $[AB]$ est l'ensemble des points équidistants de A et de B.

Propriété 8 – Médiatrices d'un triangle

Dans un triangle ABC, les trois médiatrices de $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$ sont concourantes en un point qui est le centre du cercle circonsrit au triangle ABC.

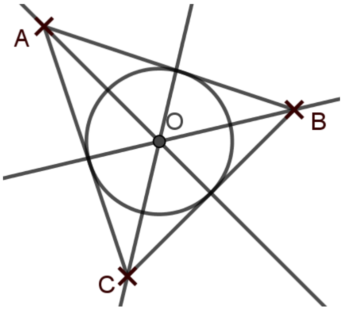


Définition 6 – Bissectrice d'un angle

La bissectrice d'un angle $\widehat{ABC}$, est une droite qui coupe cet angle en deux angles de même mesure.

Propriété 9 – Bissectrices d'un triangle

Dans un triangle ABC, les trois bissectrices de $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$ et $\widehat{CAB}$ sont concourantes en un point qui est le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

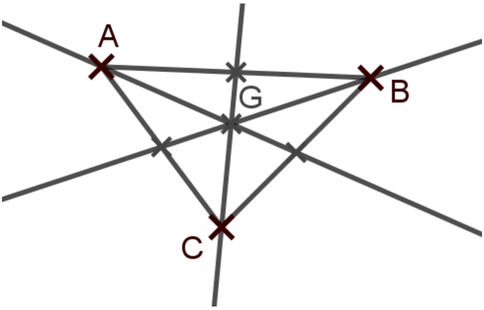


Définition 7 – Médiane d'un triangle

Une **médiane** d'un triangle est un droite qui passe par un sommet et par le milieu du côté opposé.

Propriété 10 – Médianes d'un triangle

Dans un triangle ABC, les trois médianes sont concourantes en un point qui est le centre de gravité du triangle ABC. C'est le point d'équilibre des masses du triangle. Si on met un triangle en équilibre sur ce point, il ne tombe pas.

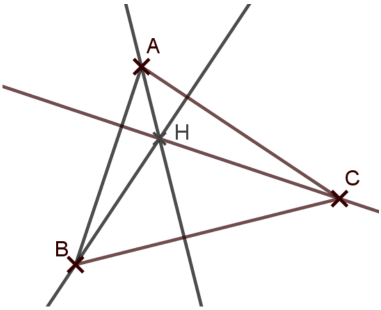


Définition 8 – Hauteur d'un triangle

Une **hauteur** d'un triangle est une droite qui passe par un sommet et par le projeté orthogonal du sommet sur le côté opposé.

Propriété 11 – Hauteurs d'un triangle

Dans un triangle ABC, les trois hauteurs sont concourantes en un point qui est l'orthocentre du triangle ABC.



(**Exercices** : Tous les exercices de la page 112 à la page 125)

4. Géométrie analytique

Longueurs et coordonnées du milieu d'un segment

On note $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points dans le repère (O, OI, OJ) du plan.

Propriété 12 – Coordonnées du milieu d'un segment

▷ Si I est le milieu de $[AB]$ alors les coordonnées de I sont :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

▷ Si le repère est orthonormé alors la longueur AB est :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exemple

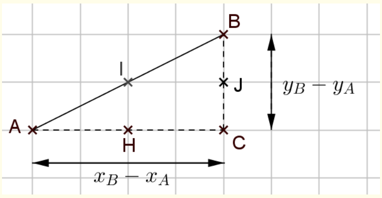
Dans un repère (O, OI, OJ) orthonormé, on note $A(2;3)$ et $B(-3;-4)$.

On alors $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74}$

et le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

donc $I\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Démonstration



• Montrons que les coordonnées de I sont $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

$x_I = x_H = x_A + \frac{AC}{2} =$

de même

$y_I = y_J = y_A + \frac{CB}{2} =$

donc

• Montrons que la longueur AB est $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Dans le triangle ABC rectangle en C, on peut utiliser le théorème de Pythagore et donc

$$AB^2 =$$

donc $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} =$
donc

$$AB =$$

5. Les vecteurs

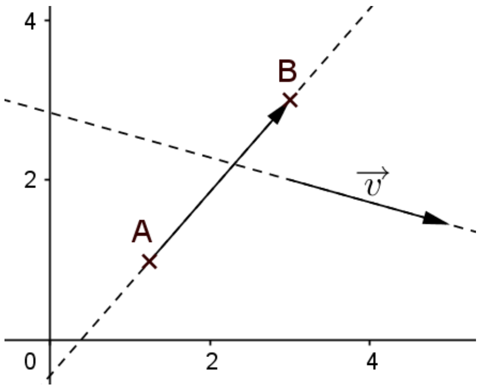
Définition 9 – Les vecteurs

<u>Un vecteur</u> du plan représente trois informations : une longueur, un sens et une direction.
Si les extrémités sont deux points connus :

$$\overrightarrow{AB} : \begin{cases} AB : \text{ la longueur du segment } [AB] \\ A \rightarrow B : \text{ le sens de A vers B} \\ (AB) : \text{ de direction la droite passant par A et B} \end{cases}$$

Sinon :

$$\vec{v} : \begin{cases} ||\vec{v}|| : \text{ la norme (longueur) du vecteur } \vec{v} \\ \rightarrow : \text{ le sens du vecteur } \vec{v} \\ \text{de direction la droite } (d) \text{ support du vecteur } \vec{v} \end{cases}$$



Définition 10 – Coordonnées d'un vecteur

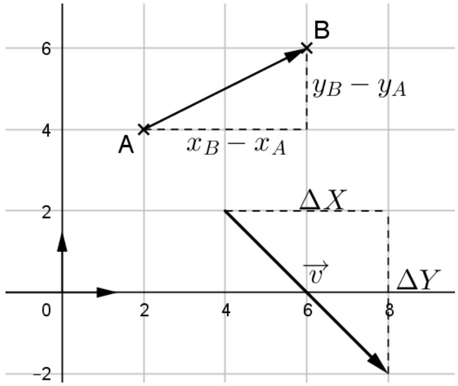
<u>Les coordonnées d'un vecteur</u> sont

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

ou

$$\vec{v} \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \end{pmatrix}$$

Pour faire la distinction entre les coordonnées d'un point et les coordonnées d'un vecteur, on écrira les coordonnées d'un point en ligne et celles des vecteurs en colonnes.



Propriété 13 – Coordonnées de A et de $\overrightarrow{OA}$

▷ Dans le repère (O, OI, OJ) on pose $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$
Le point A, qui a pour coordonnées $(x_A ; y_A)$ définit le vecteur

$$\overrightarrow{OA} = x_A \vec{i} + y_A \vec{j}$$

5.1. Vecteur nul et vecteur opposé

Définition 11 – Vecteur nul et vecteur opposé

1) **Le vecteur nul** est le vecteur de longueur nulle que l'on note $\vec{0}$.
2) **Le vecteur opposé** (de sens contraire) au vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$.
3) Le vecteur opposé (de sens contraire) au vecteur $\vec{v}$ est le vecteur $-\vec{v}$.

Propriété 14 – Somme d'un vecteur et de son opposé

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0} \text{ et } \vec{v} - \vec{v} = \vec{0}$$

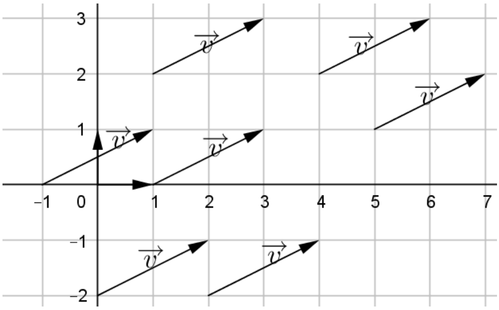
$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$$

5.2. Vecteurs égaux

Définition 12 – Les vecteurs égaux

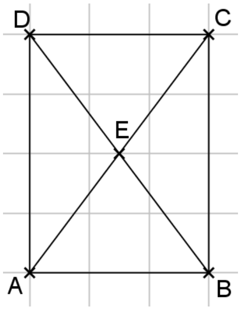
On dira que deux **vecteurs sont égaux** lorsqu'ils ont même longueur, même sens et des directions parallèles.

Tous les vecteurs ci-dessous, sont des vecteurs égaux.



Conséquences :
1) Nous avons besoin d'un seul représentant pour connaître tous les vecteurs égaux.
2) Un vecteur n'a pas d'emplacement dans le plan, on peut le déplacer où on le souhaite.

Exemples



dans la figure ci-dessus,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \text{ et } \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$$

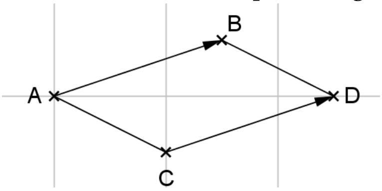
$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} \text{ et } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EB} \text{ et } \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{BE}$$

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{EA} \text{ et } \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE}$$

Propriété 15 – Egalité de vecteurs et parallélogramme

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Longleftrightarrow ABDC$ est un parallélogramme.

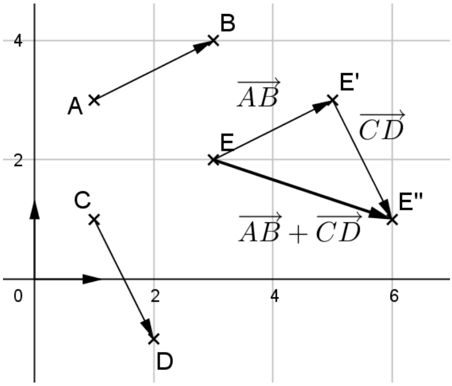


Démonstration

5.3. Somme de vecteurs

Définition 13 – Somme de deux vecteurs

La somme de deux vecteurs est une construction géométrique et pas une opération algébrique. Pour déterminer la somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ on se place en un point E du plan, on trace à partir de E le vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour arriver en E' puis à partir de E' on trace le vecteur $\overrightarrow{CD}$ pour arriver en E''. La somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ est donc égale à $\overrightarrow{EE''}$.



Propriété 16 – Coordonnées d'une somme de vecteurs

Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ a pour coordonnées

$$\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$$

Démonstration

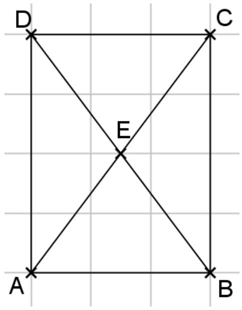
Propriété 17 – Relation de Chasles

▷ Relation de **<u>Chasles</u>**

$$\overrightarrow{A\underline{B}} + \overrightarrow{\underline{B}C} = \overrightarrow{AC}$$

Lorsque l'extrémité du premier vecteur est identique au point de départ du deuxième vecteur, il n'y a pas besoin de construction pour trouver la somme.

Exemples



dans la figure ci-dessus,

$$\overrightarrow{D\underline{C}} + \overrightarrow{\underline{C}B} = \overrightarrow{DB}$$

$$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B\underline{A}} + \overrightarrow{\underline{A}D} = \overrightarrow{BD}$$

$$\overrightarrow{A\underline{E}} + \overrightarrow{\underline{E}B} = \overrightarrow{AB}$$

Démonstration

5.4. Différence de vecteurs

Propriété 18 – Différence de deux vecteurs

$$\triangleright\ \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$$

Démonstration

Propriété 19 – Coordonnées de la différence de vecteurs

▷ Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$
alors

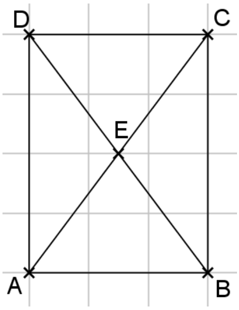
$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$$

a pour coordonnées

$$\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix}$$

Démonstration

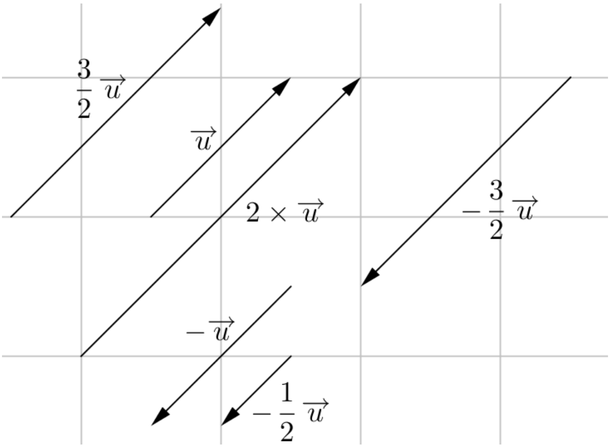
Exemples



dans la figure ci-dessus,

$$\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$$
$$\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0}$$
$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{A\underline{C}} + \overrightarrow{\underline{C}B} = \overrightarrow{AB}$$

5.5. Produit d'un vecteur par un réel



Propriété 20

▷ Si k est un réel positif alors $k \times \overrightarrow{u}$ est un vecteur qui a le même sens que $\overrightarrow{u}$, la même direction que $\overrightarrow{u}$ et de longueur $k \times ||\overrightarrow{u}||$.
▷ Si k est un réel négatif alors $k \times \overrightarrow{u}$ est un vecteur qui a le sens contraire de $\overrightarrow{u}$, la même direction que $\overrightarrow{u}$ et de longueur $-k \times ||\overrightarrow{u}||$.
▷ Dans les deux cas : $||k.\overrightarrow{u}|| = |k| \times ||\overrightarrow{u}||$.

Démonstration

Propriété 21 – Coordonnées de $k \times \overrightarrow{u}$

▷ Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{w} = k \times \overrightarrow{u}$ a pour coordonnées

$$\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$$

Démonstration

Définition 14 – Vecteurs colinéaires

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **<u>colinéaires</u>** (de directions parallèles) s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k \times \vec{v}$.

Définition 15 – Déterminant de deux vecteurs

On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

On nomme **déterminant de deux vecteurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel

$$\det\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = xy' - x'y$$

Exemple

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ alors $\det\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = 1 \times 4 - (-3) \times 2 = 10$

Propriété 22 – Critère de colinéarité

▷ Critère de colinéarité :

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si

$$\det\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = 0$$

Démonstration

On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan et on note $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.

▷ Supposons que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

Il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que

On a alors

$\det(\vec{u}, \vec{v}) =$

▷ Démontrons maintenant la réciproque :

Supposons que $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y = 0$

1. Si $y' \neq 0$ alors $xy' - x'y = 0 \Leftrightarrow x =$.

   Posons $k = \dfrac{y}{y'}$ alors on a

   $kx' =$

   et $ky' =$

   donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont

2. Si $y' = 0$ alors $xy' - x'y = 0 \Leftrightarrow$
   x' ne peut pas être nul car autrement le vecteur $\overrightarrow{v}$ est nul.
   Si $y = 0$ comme x et x' ne sont pas nuls on peut poser $k = \dfrac{x}{x'}$ et dans ce cas
   $y =$
   et
   $x =$ donc les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont

Propriété 23 – Colinéarité et alignement

▷ Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si

$$\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ sont colinéaires}$$

▷ Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si

$$\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires}$$

Démonstration

(**Exerices** : Tous les exercices de la page 140 à la page 159)