LES ENSEMBLES $\mathbb{N}$ ET $\mathbb{Z}$

Les méthodes à savoir appliquer.

Méthode 1 – Les critères de divisibilité

► Reconnaître un nombre divisible par 2 :
Le dernier chiffre doit être un chiffre pair : 0, 2, 4, 6, 8.
Exemple : 2456 est divisible par 2.
Contre-exemple : 2695 n'est pas divisible par 2.

► Reconnaître un nombre divisible par 3 :
La somme de ses chiffres doit donner un multiple de 3.
Exemple : 3888 est divisible par 3 car $3+8+8+8=27=3\times 9$.
Contre-exemple : 560 n'est pas divisible par 3 car $5+6+0=11$.

► Reconnaître un nombre divisible par 4 :
Les deux derniers chiffres forment un nombre divisible par 4.
Exemple : 12560 est divisible par 4 car $60=4\times 15$.
Contre-exemple : 77175 n'est pas divisible par 4 car 75 n'est pas multiple de 4.

► Reconnaître un nombre divisible par 5 :
Le dernier chiffre est 0 ou 5.
Exemple : 257890 est divisible par 5.
Contre-exemple : 248977 n'est pas divisible par 5.

► Reconnaître un nombre divisible par 6 :
Le nombre doit être en même temps multiple de 2 et multiple de 3.
Exemple : 1680 est divisible par 6 car divisible par 2 et 3.

► Reconnaître un nombre divisible par 7 :
Le nombre de dizaines diminué de deux fois les unités doit donner un multiple de 7.
Exemple : 714 est divisible par 7 car $71-2\times 4=63$ qui est divisible par 7.
Contre-exemple : 360 n'est pas divisible par 7 car $36-2\times 0=36$ qui n'est pas divisible par 7.

► Reconnaître un nombre divisible par 9 :
La somme de ses chiffres doit donner un multiple de 9.
Exemple : 3888 est divisible par 9 car $3+8+8+8=27=3\times 9$.
Contre-exemple : 560 n'est pas divisible par 9 car $5+6+0=11$.

► Reconnaître un nombre divisible par 10 :
Le dernier chiffre doit être un 0.
Exemple : 2638940 est divisible par 10.

► Reconnaître un nombre divisible par 11 :
La somme des chiffres d'emplacement pair diminuée de la somme des chiffres d'emplacement impair donne 0 ou un multiple de 11.
Exemple : 5775 est divisible par 11 car $(5+7)-(7+5)=0$.
Exemple : 42768 est divisible par 11 car $(4+7+8)-(2+6)=11$.

Méthode 2 – Déterminer le plus grand diviseur commun

Première possibilité :
On fait la liste des diviseurs des deux nombres puis on regarde le plus grand diviseur qui est commun aux deux listes.
Exemple : On cherche le PGCD de 30 et 42.
Diviseurs de 30 : **1**, **2**, **3**, 5, **6**, 10, 15 et 30
Diviseurs de 42 : **1**, **2**, **3**, **6**, 7, 14, 21, 42
Donc le plus grand diviseur commun de 30 et 42 est 6

Deuxième possibilité :
On utilise l'algorithme des soustractions.
Si on cherche le plus grand diviseur commun de a et b on effectue les soustractions successives :

$$a-b=r_1 \text{ puis } \max(r_1,b)-\min(r_1,b)=r_2 \ldots.$$

jusqu'à obtenir 0.
Exemple : On cherche le PGCD$(30;42)$.
$42-30=12$
$30-12=18$
$18-12=6$
$12-6=6$
$6-6=0$.
Donc le plus grand diviseur commun de 30 et 42 est 6.

Troisième possibilité :
On utilise l'algorithme des divisions euclidiennes (Euclide).
Si on cherche le plus grand diviseur commun de a et b on effectue les divisions successives :

$$a=bq_1+r_1 \text{ puis } b=r1\times q_2+r_2 \ldots\text{etc.}$$

jusqu'à obtenir un reste nul. Le plus grand diviseur commun sera le dernier reste non nul.
Exemple : On cherche le PGCD$(30;42)$.
$42=30\times 1+12$
$30=12\times 2+6$

$12 = 6 \times 2 + 0$.
Donc le plus grand diviseur commun de 30 et 42 est 6.

Quatrième possibilité :
On peut utiliser la décomposition des nombres entiers avec des nombres premiers mais cela sera abordé dans le paragraphe des nombres premiers.

Méthode 3 – Déterminer le plus petit multiple commun

Première possibilité :
On fait la liste des multiples des deux nombres puis on regarde le plus petit multiple qui est commun aux deux listes.
Exemple : On cherche le $\text{PPCM}(6;15)$.
Multiples de 6 : 6, 12, 18, 24, **30**, 36 ...
Multiples de 15 : 15, **30**, 45 ...
Donc le plus petit multiple commun de 6 et 15 est 30.

Deuxième possibilité :
On utilise la formule :

$$\text{PGCD}(a,b) \times \text{PPCM}(a,b) = a \times b$$

Exemple : On cherche le $\text{PPCM}(42;30)$.
$\text{PGCD}(42,30) \times \text{PPCM}(42,30) = 42 \times 30$ donc $6 \times \text{PPCM}(42,30) = 1260$ et $\text{PPCM}(42,30) = \dfrac{1260}{6} = 210$
Donc le plus petit multiple commun de 42 et 30 est 210.

Troisième possibilité :
On peut utiliser la décomposition des nombres entiers avec des nombres premiers mais cela sera abordé dans le paragraphe des nombres premiers.

Méthode 4 – Décomposer des entiers avec les nombres premiers

Tous les entiers peuvent s'exprimer avec des multiplications de nombres premiers.
Exemple
▷ On veut décomposer le nombre 360 à l'aide des nombres premiers :
360 est divisible par 2 donc $360 = 2 \times 180$
180 est divisible par 2 donc $360 = 2 \times 2 \times 90$
90 est divisble par 2 donc $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 45$
45 est divisble par 3 donc $360 = 2^3 \times 3 \times 15$
15 est divisble par 3 donc $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$
Conclusion : $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$