Énoncé des Exercices

1. Comprendre et appliquer le cours

Exercice 1

1) Un entier naturel est parfait s'il est égal à la moitié de la somme de ses diviseurs ou encore s'il est égal à la somme de ses diviseurs stricts.
Montrer que 6, 28 et 496 sont des nombres parfaits.
2) Montrer que 12 n'est pas parfait.
3) Deux nombres entiers distincts sont dits amicaux (ou amiables) si la somme des diviseurs propres de l'un (diviseurs autres que lui-même) égale l'autre. Montrer que 220 et 284 sont amicaux.

Exercice 2

1) Décomposer 277200 et 687960 en produits de nombres premiers puis simplifier la fraction $\dfrac{277200}{687960}$.

2) Décomposer 2880 en produits de nombres premiers puis réduire $\sqrt{2880}$
3) Simplifier $\dfrac{591500}{280280}$ et $\sqrt{591500} \times \sqrt{280280}$.

Exercice 3

1) Décomposer 210 et 297 en produit de facteurs premiers.
2) Déterminer PGCD de 210 et 297 et PPCM de 210 et 297
3) On cherche à quadriller une feuille de format $A4$ (21 cm sur $29,7$ cm) à l'aide d'un certain nombre de carrés ayant tous le même nombre de millimètres de côté. Donner toutes les possibilités.

Exercice 4

Un photographe doit réaliser une exposition en présentant ses œuvres sur des panneaux contenant chacun le même nombre de photos de paysages et le même nombre de portraits. Il dispose de 224 photos de paysage et de 288 portraits. Combien peut-il réaliser au maximum de panneaux en utilisant toutes les photos ? Combien chaque panneau contient-il de photos de paysages et de portraits ?

Exercice 5

Montrer que les nombres suivants ne sont pas premiers :

48594 / 15 / 391 / 3179 / 2873 / 9801 / 2783

Exercice 6

Si p est un nombre entier naturel impair, lesquels de ces nombres sont des entiers naturels ?

$$A = \frac{3 \times (p^2+1)}{2} \qquad B = 15 \times \frac{p}{2} \times \frac{p+1}{5} \qquad C = \frac{(p+1)^2+(p-1)^2}{2}$$

Exercice 7

Si p est un nombre premier strictement supérieur à 2, expliquer pourquoi les nombres ci-dessous sont des entiers relatifs :

$$A = \frac{3p-1}{2} \qquad B = \frac{3p+1}{2} \qquad C = \frac{p^2-2p+1}{4} \qquad D = \frac{9p^2-1}{4}$$

2. Exercices d'approfondissement

Exercice 8

n est un entier naturel.
1) Pour quelles valeurs de n, n^2-2n+1 est-il premier ?
2) Pour quelles valeurs de n, n^2+2n+1 est-il premier ?
3) Que peut-on dire de n^2 ?

Exercice 9

Nombres premiers de Mersenne (savant français 1588-1648)
Mersenne nous dit que : Si n est un nombre premier alors 2^n-1 l'est ausi.
1) Vérifier que cette formule donne des nombres premiers, en prenant pour n les premiers nombres premiers.
2) Quelle est la première valeur de n qui ne donne pas un nombre premier par cette formule ?

Exercice 10

Nombres premiers de Fermat (mathématicien français 1601-1665)
Fermat nous dit que : Si n est un nombre entier naturel, alors $2^{2^n}+1$ est un nombre premier.
1) Calculer les nombres obtenus avec n un entier allant de 0 à 3.
2) En revanche, montrer que la valeur $n=5$ donne un nombre divisible par 641.

Exercice 11

1) Somme des nombres impairs
Pour n un nombre entier positif, on pose :

$$S_n = 1+3+5+7+9+11+\ldots+2n+1$$

a. Calculer S_0, S_1, S_2 et S_3.
b. Pour tout n entier naturel, écrire plus simplement $(n+1)^2-n^2$.
c. En utilisant la question b., calculer S_{10} et S_{50}.
d. Construire un algorithme et un programme Python permettant d'entrer la valeur de n et d'afficher celle de S_n.

2) Somme de fractions
Pour n un nombre entier positif non nul, on pose :

$$S_n = \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$$

a. Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4.
b. Pour tout n entier naturel, écrire $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ sous la forme d'une seule fraction.
c. En utilisant la question b., calculer S_6 et S_{999}.
d. Construire un algorithme et un programme Python permettant d'entrer la valeur de n et d'afficher celle de S_n.
3) Somme des entiers positifs
Pour n un nombre entier positif , on pose : $S_n = 0+1+2+3+4+5+\ldots+(n-1)+n$
a. Calculer S_0, S_1, S_2, S_3 et S_7.
b. On note $T_n = n+(n-1)+\ldots+5+4+3+2+1+0$. Que peut-on dire de S_n et T_n? Montrer que :$S_n+T_n = n(n+1)$
c. En déduire une expression simple de S_n et en déduire la valeur de S_{100}.
d. Construire un algorithme et un programme Python permettant d'entrer la valeur de n et d'afficher celle de S_n.

4) Somme des puissances de 2
Pour n un nombre entier positif, on pose :

$$S_n = 2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+\ldots+2^{n-1}+2^n$$

a. Calculer S_0, S_1, S_2 et S_3.
b. Montrer que $2S_n - S_n = 2^{n+1}-1$
c. En déduire une expression simple de S_n et en déduire la valeur de S_{10}.

d. Construire un algorithme et un programme Python permettant d'entrer la valeur de n et d'afficher celle de S_n.

3. Exercices de programmation

EXERCICE 12

Construire un algorithme, puis une fonction Python, qui prennent en entrée deux nombres entiers a et b puis qui retournent "True" si a est un multiple de b et "False" sinon.

EXERCICE 13

Construire un algorithme, puis une fonction Python, qui prennent en entrée deux nombres entiers a et b puis qui retournent le plus grand multiple de a inférieur ou égal à b.

EXERCICE 14

Construire un algorithme, puis une fonction Python, qui prennent en entrée un entier naturel n puis qui retournent "True" si n est un nombre premier et "False" sinon.

EXERCICE 15

algorithme de primalité

Construire un algorithme et un programme Python qui prennent en entrée un entier naturel n et qui affichent le fait que n est ou n'est pas premier.
On admettra la propriété suivante : tout entier naturel $n > 2$, non premier, admet au moins un diviseur premier$p$ tel que $p \leq n$.