Les ensembles N et Z

Classe de seconde

Cours de Vincent Obaton

“Les Mathématiques sont la poésie des sciences ”

Léopold Sédar Senghor (Poète, écrivain et homme d’état)

Année 2019-2020

Liste des savoirs et savoir-faire du chapitre :

CODES	INTITULES	Bilan		
		A	EA	NA
CH0101	Modéliser et résodre ds problèmes mobilisant les notions de multiple, de diviseur, de nmbre pair, denombre impair, de nobre permier.			
CH0102	Présenter les résultats fractionnaires sous forme irréductible.			

Compétences dans tous les chapitres :

INTITULE	Bilan		
	A	EA	NA
Chercher			
Modéliser			
Représenter			
Calculer			
Raisonner			
Communiquer			

Chapitre 1

Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

1. Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

Entiers naturels : $\mathbb{N} = \{\text{Ensemble des entiers positifs ou nuls}\} = \{0;1;2;3;4;\ldots\}$

Entiers relatifs : $\mathbb{Z} = \{\text{Ensemble des entiers}\} = \{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;\ldots\}$

Propriété 1 – $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

Tout entier naturel est un entier relatif.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

(La réciproque n'est pas vraie.)

Exemples

▷ 3 est un entier naturel et un entier relatif.
▷ -3 est un entier relatif mais n'est pas un entier naturel.

Propriété 2 – Stabilité de $\mathbb{N}$

▷ $\mathbb{N}$ est stable par addition et multiplication.

$$\text{Si } x \in \mathbb{N} \text{ et } y \in \mathbb{N} \text{ alors } x+y \in \mathbb{N} \text{ et } x \times y \in \mathbb{N}$$

▷ $\mathbb{Z}$ est stable par addition, soustraction et multiplication.

$$\text{Si } x \in \mathbb{Z} \text{ et } y \in \mathbb{Z} \text{ alors } x+y \in \mathbb{Z},\ x-y \in \mathbb{Z} \text{ et } x \times y \in \mathbb{Z}$$

Exemples

▷ Si $x \in \mathbb{N}$ alors $3x+5 \in \mathbb{N}$ et $x^2+9 \in \mathbb{N}$ mais $3x-5$ n'est pas toujours dans $\mathbb{N}$.
▷ Si $x \in \mathbb{Z}$ alors $3x+5 \in \mathbb{Z}$ et $x^2+9 \in \mathbb{Z}$ et $3x-5 \in \mathbb{Z}$.

2. Multiples et diviseurs

Définition 1 – Multiple

Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$.
On dit que a est **un multiple** de b si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = k \times b$.

Exemple : 35 est un multiple de 7 car $35 = 5 \times 7$.

Définition 2 – Diviseur

Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.
On dit que b est **un diviseur** de a si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = k \times b$.

Exemple : 7 est un diviseur de 35 car $35 = 5 \times 7$.

Propriété 3 – Quelques cas particuliers

▷ 0 est un multiple de tous les entiers relatifs.
▷ Tous les entiers relatifs sont des diviseurs de 0.
▷ 1 et -1 sont des diviseurs de tous les entiers relatifs.
▷ 1 est un diviseur de tous les entiers naturels.

Démonstration

Notation : $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$. Si b divise a alors on note $b|a$.

Propriété 4 – Somme de deux multiples

La somme de deux multiples de a est un multiple de a.

Démonstration

Propriété 5 – Différence de deux multiples

La différence de deux multiples de a est un multiple de a.

Démonstration

Propriété 6 – Produit de deux multiples

Le produit de deux multiples de a est un multiple de a.

Démonstration

(**Exerices du livre Déclic 2de Hachette** : Ex 44 à 46 page 50 et les pages 52 et 53)

3. Nombres pairs et nombres impairs

Définition 3 – Nombre pair

On dit que $n \in \mathbb{Z}$ est un nombre pair si $2|n$ (2 divise n).

Exemples

▷ 14 est pair car $14 = 2 \times 7$.

▷ -122 est pair car $-122 = 2 \times (-61)$.

Propriété 7 – Caractéristiques d'un nombre pair

▷ $n \in \mathbb{Z}$ est pair si et seulement si la partie décimale de $n/2$ est nulle.

▷ $n \in \mathbb{Z}$ est pair si et seulement si le reste de la division euclidienne de n par 2 est nul.

▷ $n \in \mathbb{Z}$ est pair si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$.

Exemples

122 est pair car :

▷ $\dfrac{122}{2} = 61$ et la partie décimale de 61 est nulle.

▷ $122 = 2 \times 61 + 0$ donc le reste de la division euclidienne de 122 par 2 est 0.
▷ $122 = 2 \times 61$.

Démonstration

Définition 4 – Nombre impair

On dit que $n \in \mathbb{Z}$ est un nombre impair si 2 ne divise pas n.

Exemple
▷ 13 est impair car il n'existe pas d'entier dont 13 est le double.

Propriété 8 – Caractéristiques d'un nombre impair

▷ $n \in \mathbb{Z}$ est impair si et seulement si la partie décimale de $n/2$ est $0,5$.
▷ $n \in \mathbb{Z}$ est impair si et seulement si le reste de la division euclidienne de n par 2 est 1.
▷ $n \in \mathbb{Z}$ est impair si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k+1$ ou $n = 2k-1$.

Exemples
123 est impair car :
▷ $\dfrac{123}{2} = 61,5$ et la partie décimale de 61 est $0,5$.
▷ $123 = 2 \times 61 + 1$ donc le reste de la division euclidienne de 122 par 2 est 1.
▷ $123 = 2 \times 61 + 1$.

Démonstration

Propriété 9 – Parité de n et de n^2

Si n est pair alors n^2 est pair.

Démonstration

Propriété 10 – Parité de n et de n^2

Si n est impair alors n^2 est impair.

Démonstration

(**Exerices du livre Déclic 2de Hachette** : Ex 47 à 50 page 50 et les pages 54 et 55)

4. Les nombres premiers

Définition 5 – Nombre premier

On note $a \in \mathbb{N}$.
On dit que a est **un nombre premier** s'il admet exactement deux diviseurs dans $\mathbb{N}$: 1 et lui-même.

Exemples

▷ 7 est un nombre premier car ses diviseurs dans $\mathbb{N}$ sont 1 et 7.
▷ 6 n'est pas un nombre premier car ses diviseurs dans $\mathbb{N}$ sont 1, 2, 3 et 6.
▷ 1 n'est pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur dans $\mathbb{N}$: 1.

Méthode 1 – Trouver tous les nombres premiers inférieurs à 100

Cette méthode se nomme **le crible d'*Eratosthène***.

Eratosthène : Mathématicien, astronome, géographe et philosophe du III^e siècle avant Jésus-Christ, il établit le crible d'Ératosthène, méthode qui permet de déterminer par exclusion tous les nombres premiers. Il travailla sur le problème de la duplication du cube, et imagina le mésolabe, instrument propre à connaître les moyennes proportionnelles.

On écrit tous les nombres entiers naturels de 0 jusqu'à 100.
▷ On commence par barrer le 0 et le 1 qui ne sont pas premiers.
▷ On entoure le 2 qui est premier puis on barre tous les mutliples de 2.
▷ On entoure le 3 puis on barre tous les multiples de 3.

▷ On entoure le 5 puis on barre tous les multiples de 5.
▷ On entoure le 7 puis on barre tous les multiples de 7.
On obtient alors tous les nombres premiers inférieurs 100.

~~0~~	~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~
~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19
~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29
~~30~~	31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~
~~40~~	41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~
~~50~~	~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59
~~60~~	61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~
~~70~~	71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79
~~80~~	~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89
~~90~~	~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~

(**Exerices du livre Déclic 2de Hachette** :
Ex 81 et 82 page 55
Approfonissement : Les pages 56 et 57)