THEME 14 : Déterminant d'un système (AP)

Le but de l'activité est de trouver une méthode rapide pour voir si un système a ou n'a pas de solution, avant de le résoudre.

Partie I : Découverte

On note (S) le système : $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ avec a, b, c , a', b' et c' des réels, a et a' non nul.

Rappels :

a. Deux droites non verticales, sont strictement parallèles, si et seulement si elles ont les mêmes coefficients directeurs et des ordonnées à l'origine différentes.
b. Deux droites non verticales, sont confondues si et seulement si elles ont même coefficient directeur et même ordonnée à l'origine.

Questions :

1. Ecrire le système (S) avec des équations réduites de droites.
2. Démontrer que les droites sont strictement parallèles si et seulement si $ab'-ba'=0$ et $ca'-c'a\neq 0$
3. Démontrer que les droites sont confondues si et seulement si $ab'-ba'=0$ et $ca'-c'a=0$
4. Quelle condition faut-il pour que les deux droites soient sécantes mais pas confondues et donc que le système puisse avoir une solution unique?

On nomme $\boxed{\det(S)=ab'-ba'}$ **le déterminant du système S**.

Partie II : Exemples

Déterminer, sans résoudre les systèmes, s'ils ont une seule solution unique ou pas.

$(S_1):\begin{cases} y=2x-5 \\ y=-3x+4 \end{cases}$ $\quad (S_2):\begin{cases} 3y-2x+15=0 \\ 3x-y+1=0 \end{cases}$

$(S_3):\begin{cases} 30x-6y-12=0 \\ y-5x-1=0 \end{cases}$ $\quad (S_4):\begin{cases} -2x+3y+1=0 \\ 6y-4x+6=0 \end{cases}$

Partie III : Approfondissement

Trouver les valeurs du réels α pour que le système

$(S_5):\begin{cases} x+\alpha y=1 \\ (1-\alpha)x+\alpha y=-2 \end{cases}$ ait

1. Une solution unique
2. Aucune solution
3. Une infinité de solutions

Evaluation

Thème 14			
AA	A	EA	NA
SEI06			
AA	A	EA	NA

Notations

Si un système admet une seule solution alors l'ensemble des solutions sera de la forme

$S=\{(x_A;y_A)\}$

Si un système n'admet pas de solution, on dit que l'ensemble des solutions est vide et on note

$S=\varnothing$

Si un système admet une infinité de solution alors les couples solutions sont les coordonnées de tous les points de la droite.(les deux droites étant confondues) et on note

$S=\{(k;mk+p),k\in\mathbb{R}$