

## Thème 04 : Fractions continues

### Exercice :

**Evariste Galois** a étudié durant sa courte vie, les **fractions continues**, qui sont des fractions de la forme

$$x = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \frac{1}{a_5 + \dots}}}}$$

que l'on note aussi  $x = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots]$

Avec  $a_1, a_2, a_3 \dots$  des entiers strictement positifs.

Nous allons ici nous intéresser aux fractions continues de la forme

$$x = a + \frac{1}{b + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \dots}}}$$

**PARTIE I** (Dans cette partie  $a=1$  et  $b=1$ )

- 1) Montrer que  $x$  est solution de l'équation  $(E_1) : x^2 = x + 1$
- 2) Montrer que  $(E_1)$  est équivalente à  $(E_2) : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$
- 3) Résoudre l'équation  $(E_1)$
- 4) Déterminer une écriture plus simple de  $x$ .

**PARTIE II** (Dans cette partie  $a=2$  et  $b=2$ )

- 1) Montrer que  $x$  est solution de l'équation  $(E_1) : x^2 = 2x + 1$
- 2) Montrer que  $(E_1)$  est équivalente à  $(E_2) : (x-1)^2 - 2 = 0$
- 3) Résoudre l'équation  $(E_1)$
- 4) Déterminer une écriture plus simple de  $x$ .
- 5) En déduire l'écriture de  $\sqrt{2}$  sous forme d'une fraction continue

**PARTIE III** (Etude du cas général)

- 1) Montrer que  $x$  est solution de l'équation  $(E_1) : bx^2 - abx - a = 0$
- 2) Montrer que  $(E_1)$  est équivalente à  $(E_2) : \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2b^2 + 4ab}{4b^2} = 0$
- 3) Résoudre l'équation  $(E_1)$
- 4) Montrer que  $x = \frac{ab + \sqrt{a^2b^2 + 4ab}}{2b}$
- 5) Vérifiez les résultats des deux parties précédentes.
- 6) Déterminez une écriture simple de
 

a) $x = [2, 3, 2, 3, \dots]$	c) $x = [3, 1, 3, 1, \dots]$
b) $x = [1, 3, 1, 3, \dots]$	d) $x = [3, 3, 3, 3, \dots]$

### Evaluation

Thème 04			
AA	A	EA	NA
SEI06			
AA	A	EA	NA

### Historique

**Evariste GALOIS**

**25 Octobre 1811**

Naissance à Bourg-La-Reine

**1823** (12 ans)

Entre à Louis-Le-Grand.

**1827** (16 ans)

Premier prix au concours général de mathématiques.

**1830** (19 ans)

Publie trois mémoires et envoie les textes à l'Académie.

**1831** (20 ans)

Ouvre un cours public d'algèbre à la librairie Caillot et rédige son mémoire sur les équations.

**1832** (20 ans)

Il meurt dans un duel après avoir rédigé son testament mathématique