**Exercice 1 (5 pts) :**

1. $f_1(x)$ existe pour toutes les valeurs de $x$ réelles donc $\boxed{D_{f_1} = \mathbb{R}}$
2. $f_2(x)$ existe si et seulement si $x + 4 \neq 0 \iff x \neq -4$ donc $\boxed{D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{-4\}}$
3. $f_3(x)$ existe si et seulement si $(x + 3)(5 - x) \neq 0 \iff x \neq -3$ et $x \neq 5$ donc $\boxed{D_{f_3} = \mathbb{R} \setminus \{-3; 5\}}$
4. $f_4(x)$ existe si et seulement si $x + 1 \geq 0 \iff x \geq -1$ donc $\boxed{D_{f_4} = [-1; +\infty[}$
5. $f_5(x)$ existe si et seulement si $1 - x \geq 0 \iff 1 \geq x$ donc $\boxed{D_{f_5} = ]-\infty; 1]}$

**Exercice 2 (5 pts) :**

On note $f : x \longmapsto 4x^2 - 5$ et $g : x \longmapsto \dfrac{x-1}{x-4}$

1. $f(0) = 4 \times 0^2 - 5 = -5$ donc $\boxed{\text{l'image de } 0 \text{ par } f \text{ est } -5}$
2. $f(x) = -1 \iff 4x^2 - 5 = -1 \iff 4x^2 - 4 = 0 \iff 4(x-1)(x+1) = 0 \iff x = 1$ ou $x = -1$
   donc $\boxed{\text{les antécédents de } -1 \text{ par } f \text{ sont } -1 \text{ et } 1}$
3. $g\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\dfrac{1}{3} - 1}{\dfrac{1}{3} - 4} = \dfrac{-\dfrac{2}{3}}{-\dfrac{11}{3}} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{11} = \dfrac{2}{11}$ donc $\boxed{\text{l'image de } \dfrac{1}{3} \text{ par } g \text{ est } \dfrac{2}{11}}$
4. $g(x) = 1 \iff \dfrac{x-1}{x-4} = -1 \iff x - 1 = -x + 4 \iff 2x = 5 \iff x = \dfrac{5}{2}$ donc $\boxed{\text{l'antécédent de } -1 \text{ par } g \text{ est } \dfrac{5}{2}}$
5. $g(x) = -\dfrac{1}{4}x \iff \dfrac{x-1}{x-4} = -\dfrac{1}{4}x \iff 4(x-1) = -x(x-4) \iff 4x - 4 = -x^2 + 4x \iff 4 = x^2 \iff x = 2$ ou $x = -2$
   donc $\boxed{S = \{-2; 2\}}$

**Exercice 3 (5 pts) :**

1. L'image de 3 par $f$ est $\boxed{3}$ et l'image de $-5$ par $f$ est $\boxed{0}$.
2. Les antécédents de 1 par $f$ sont $\boxed{-6\,;\,0\,;\,4 \text{ et } 7}$
   Les antécédents de $-3$ par $f$ sont $\boxed{-4\,;\,-2 \text{ et } 8,7}$
3. $f(x) = 3 \iff \boxed{S = \{1; 3; 6\}}$
4. $f(x) < 0 \iff \boxed{S = ]-5; -1[\cup]8; 9]}$
5. $f(x) \geq 1 \iff \boxed{S = [-9; -6] \cup [0; 7]}$
6. Tableau des signes de $f(x)$

| $x$ | $-9$ | | $5$ | | $-1$ | | $8$ | | $9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

7. Le maximum de $f$ est $\boxed{4}$ et est atteint pour $\boxed{x = 2}$

**Exercice 4 (5 pts) :**

1. $4 - x^2 = x + 2 \iff f(x) = g(x) \iff \boxed{S = \{-2; 1\}}$
2. $4 - x^2 > x + 2 \iff f(x) > g(x) \iff \boxed{S = ]-2; 1[}$
3. $4 - x^2 \leq x + 2 \iff f(x) \leq g(x) \iff \boxed{S = [-4; -2] \cup [1; 4]}$
4. Tableau des signes de la fonction $h$ définie sur $[-4; 4]$ par $h(x) = f(x) - g(x)$

| $x$ | $-4$ | | $-2$ | | $-1$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

**Exercice facultatif/Bonus/Supplémentaire (2 pts) :**

1. $A = 504^2 - 502^2 = (503 + 1)^2 - (503 - 1)^2 = 4 \times 503 = \boxed{2012}$
2. $B = \left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) - 1 = \boxed{0}$