Exercice 01 :

1. Domaine de définition de f :
   $f(x)$ existe pour toutes valeurs réels de $\mathbb{R}$ donc $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$
   Domaine de définition de g :
   $g(x)$ existe si et seulement si $x+5 \neq 0 \iff x \neq -5$ donc $\boxed{D_g = \mathbb{R} \setminus \{-5\}}$
   Domaine de définition de h :
   $h(x)$ existe si et seulement si $15-3x \geq 0 \iff 15 \geq 3x \iff 5 \geq x$ donc $\boxed{D_h =]-\infty; 5]}$
2. $f(1) = 4(1-1)^2 - 100 = 4(0)^2 - 100 = 0 - 100 = \boxed{-100}$ donc l'image de 1 par f est -100
   $g(1) = \dfrac{2-3}{1+5} = \boxed{-\dfrac{1}{6}}$ donc l'image de 1 par g est $-\dfrac{1}{6}$
   $h(1) = \sqrt{15-3} = \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \boxed{2\sqrt{3}}$ donc l'image de 1 par h est $2\sqrt{3}$
3. $f(x) = 0 \iff 4(x-1)^2 - 100 = 0 \iff 4[(x-1)^2 - 25] = 0$
   $\iff 4(x-1+5)(x-1-5) = 0 \iff 4(x+4)(x-6) = 0$
   $\iff x = -4$ ou $x = 6$ donc les antécédents de 0 par f sont -4 et 6.
4. $g(x) = 1 \iff \dfrac{2x-3}{x+5} = 1$ avec $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$
   $\iff 2x-3 = x+5 \iff x = 8$ donc l'antécédent de 1 par g est 8.
5. Pour tout $x \in]-\infty; 5]$:
   $h(x) = \sqrt{3} \iff \sqrt{15-3x} = \sqrt{3} \iff 15-3x = 3 \iff x = 4$ donc l'antécédent de $\sqrt{3}$ par h est 4.
6. $f(\sqrt{2}) = 4(\sqrt{2}-1)^2 - 100 = 4(2-2\sqrt{2}+1) - 100 = 12 - 8\sqrt{3} - 100 = \boxed{-88-8\sqrt{2}}$
   $g\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\dfrac{2}{3}-3}{\dfrac{1}{3}+5} = \dfrac{-\dfrac{7}{3}}{\dfrac{16}{3}} = -\dfrac{7}{3} \times \dfrac{3}{16} = \boxed{-\dfrac{7}{16}}$
   $h(-3) = \sqrt{15+9} = \sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = \boxed{2\sqrt{6}}$
7. Résoudre les équations :
   (a) $f(x) = -96 \iff 4(x-1)^2 - 100 = -96 \iff 4(x-1)^2 - 4 = 0 \iff 4[(x-1)^2 - 1] = 0$
   $\iff 4(x-1-1)(x-1+1) = 0 \iff 4(x-2)(x) = 0$
   $\iff x = 2$ ou $x = 0$ donc $\boxed{S = \{0; 2\}}$
   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$:
   $g(x) = 2x-8 \iff \dfrac{2x-3}{x+5} = 2x-8 \iff 2x-3 = (2x-8)(x+5)$
   $\iff 2x-3 = 2x^2 + 10x - 8x - 40 \iff x^2 = \dfrac{37}{2}$
   $\iff x = \sqrt{\dfrac{37}{2}} = \dfrac{\sqrt{74}}{2}$ ou $x = -\sqrt{\dfrac{37}{2}} = -\dfrac{\sqrt{74}}{2}$ donc $\boxed{S = \left\{-\dfrac{\sqrt{74}}{2}; \dfrac{\sqrt{74}}{2}\right\}}$
   (c) Pour tout $x \in]-\infty; 5]$:
   $h(x) = x - \dfrac{3}{2} \iff \sqrt{15-3x} = x - \dfrac{3}{2} \iff 15-3x = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2$
   $\iff 15-3x = x^2 - 3x + \dfrac{9}{4} \iff x^2 = \dfrac{51}{4}$
   $\iff x = \dfrac{\sqrt{51}}{2}$ ou $x = -\dfrac{\sqrt{51}}{2}$
   $\boxed{S = \left\{-\dfrac{\sqrt{51}}{2}; \dfrac{\sqrt{51}}{2}\right\}}$