Exercice 1 (10 pts) :

1. Dans le triangle ABC, $N \in [AB]$, $P \in [AC]$ et $(NP)//(BC)$
   Donc d'après la propriété de Thalèse, on a $\dfrac{AN}{AB} = \dfrac{AP}{AC} = \dfrac{NP}{BC}$
   donc $\dfrac{AN}{\sqrt{3}} = \dfrac{AP}{\sqrt{3}} = \dfrac{NP}{\sqrt{3}} \Longleftrightarrow AN = AP = NP$ donc le triangle ANP est équilatéral et $AN = AP = NP = x$
2. Dans le triangle ACH rectangle en H on peut utiliser la trigonométrie :
   $\sin(60^\circ) = \dfrac{\text{Côté opposé}}{\text{Hypoténuse}} = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AH}{\sqrt{3}}$ donc $AH = \sqrt{3} \times \cos(60^\circ) = \sqrt{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3}{2}$ donc $\boxed{AH = \dfrac{3}{2}}$
3. De la même façon que dans la question précédente mais dans le triangle AKP rectangle en K, on obtient :
   $\sin(60^\circ) = \dfrac{\text{Côté opposé}}{\text{Hypoténuse}} = \dfrac{AK}{AP} = \dfrac{AK}{x}$ donc $AK = x \times \cos(60^\circ) = x \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$ donc $\boxed{AK = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}}$
   $AH = AK + KH = \dfrac{x\sqrt{3}}{2} + x$ donc $\boxed{AH = x + \dfrac{x\sqrt{3}}{2}}$
4. Les deux valeur de AH précédente sont égales dont $\boxed{\dfrac{3}{2} = x + \dfrac{x\sqrt{3}}{2}}$
5. $\dfrac{3}{2} = x + \dfrac{x\sqrt{3}}{2} \Longleftrightarrow \dfrac{3}{2} = \dfrac{2x + x\sqrt{3}}{2} \Longleftrightarrow 3 = 2x + x\sqrt{3}$ donc l'équation est équivalente à $\boxed{2x + x\sqrt{3} = 3}$
6. $2x + x\sqrt{3} = 3 \Longleftrightarrow x(2 + \sqrt{3}) = 3 \Longleftrightarrow x = \dfrac{3}{2 + \sqrt{3}} = \dfrac{3(2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \dfrac{6 - 3\sqrt{3}}{4 - 3} = 6 - 3\sqrt{3}$ donc $\boxed{x = 6 - 3\sqrt{3}}$
7. Notons A l'aire du carré $MNPQ$ alors :
   $A = (6 - 3\sqrt{3})^2 = 6^2 - 2 \times 6 \times 3\sqrt{3} + (3\sqrt{3})^2 = 36 - 36\sqrt{3} + 27 = 63 - 36\sqrt{3}$
8. Aire grise (noté B) est égale à l'aire de ABC moins l'aire de $MNPQ$
   $B = \dfrac{BC \times AH}{2} - (63 - 36\sqrt{3}) = \dfrac{\frac{3}{2} \times \sqrt{3}}{2} - 63 + 36\sqrt{3} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4} - 63 + 36\sqrt{3} = \dfrac{147\sqrt{3}}{4} - 63$ donc $\boxed{B = \dfrac{147\sqrt{3}}{4} - 63}$

Exercice 2 (7 pts) :

1. Les coordonnées de I sont $\left(\dfrac{x_A + x_C}{2}; \dfrac{y_A + y_C}{2}\right)$ donc $\boxed{I\left(\dfrac{3}{2}; 1\right)}$
2. $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{3^2 + (-6)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$
   $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{7^2 + (-4)^2} = \sqrt{65} = 3\sqrt{5}$
   $CB = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
   Dans le triangle ABC, $AC^2 = 65$ et $AB^2 + BC^2 = 45 + 20 = 65$
   donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B
3. Le centre du cercle circonscrit d'un triangle rectangle est au milieu de l'hypoténuse donc le centre du cercle circonscrit de ABC est I le milieu de $[AC]$ donc $\boxed{I\left(\dfrac{3}{2}; 1\right)}$
4. On note D tel que $ABCD$ soit un rectangle alors D est le symétrique de B par rapport à I donc I est le milieu de $[BD]$.
   On a donc $\dfrac{x_B + x_D}{2} = \dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{y_B + y_D}{2} = 1$ et on obtient donc $x_D = 2$ et $y_D = 5$ donc $\boxed{D(2; 5)}$
5. Dans le triangle IHC rectangle en H on utilise la trigonométrie :
   $\tan(\widehat{HIC}) = \dfrac{HC}{HI} = \dfrac{\sqrt{5}}{\frac{3\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{2}{3}$ d'après la calculatrice on obtient : $\widehat{HIC} \approx 34^\circ$ et $\widehat{HCI} \approx 56^\circ$

Exercice 3 (4 pts) :

1. Propriété : S'il pleut, le sol non couvert est mouillé (Vraie)
   Réciproque : Si le sol non couvert est mouillé alors il pleut (Fausse)
   Contraposée : Si le sol non couvert n'est pas mouillé alors il ne pleut pas (Vraie)
2. Propriété : Si $(x - 1)^2 = 4$ alors $x = 3$ (Fausse)
   Réciproque : Si $x = 3$ alors $(x - 1)^2 = 4$ (Vraie)
   Contraposée : Si $x \neq 3$ alors $(x - 1)^2 \neq 4$ (Fausse)

Exercice facultatif/Bonus/Supplémentaire (2 pts) :

1. α vérifie $\sqrt{1 + \alpha} = \alpha \Longleftrightarrow 1 + \alpha = \alpha^2 \Longleftrightarrow \dfrac{1 + \alpha}{\alpha} = \dfrac{\alpha^2}{\alpha} \Longleftrightarrow \dfrac{1}{\alpha} + 1 = \alpha \Longleftrightarrow \dfrac{1}{\alpha} = \alpha - 1$
2. $x^2 + 6x = 16 \Longleftrightarrow (x + 3)^2 - 9 = 16 \Longleftrightarrow (x + 3)^2 = 25 \Longleftrightarrow x + 3 = 5$ ou $x + 3 = -5 \Longleftrightarrow x = 2$ ou $x = -8$ donc $\boxed{S = \{-8; 2\}}$