Exercice 1 (5 pts) :

1. Le triangle AIJ est rectangle en J avec $IJ = \dfrac{15}{2}$ et $OJ = 3 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{2}$
   d'après le théorème de¨Pythagore : $OI^2 = OJ^2 + IJ^2$ donc
   $OI = \sqrt{OJ^2 + IJ^2} = \sqrt{\left(\dfrac{15}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{306}{4}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{34}$
2. OIJ est un triangle, $M \in [OI]$, $K \in [OJ]$ et $(MK)//(IJ)$
   d'après le théorème de Thalès : $\dfrac{OM}{OI} = \dfrac{OK}{OJ} = \dfrac{MK}{IJ}$ donc $\dfrac{OM}{OI} = \dfrac{3/2}{9/2} = \dfrac{MK}{15/2}$ donc $MK = \dfrac{15/2 \times 3/2}{5/2} = \dfrac{5}{2}$
3. Dans le triangle OIJ rectangle en J, $\tan(\widehat{JIO}) = \dfrac{OJ}{IJ} = \dfrac{3}{5}$ donc $JIO \approx 31^\circ$ et $\widehat{JOI} = 90 - \widehat{JIO} \approx 59^\circ$
4. $\widehat{JIO}$ et $\widehat{IML}$ sont alternes-internes et $(ML)//(IJ)$ donc $\widehat{IML} = \widehat{JIO} \approx 31^\circ$

Exercice 2 (5 pts) :

1. Dans le triangle ABC, $BC^2 = 4$ et $AC^2 + AB^2 = 1 + 3 = 4$
   d'après la réciproque de la propriété de Pythagore, ABC est rectangle en A.
2. Dans le triangle BHA rectangle en H, $\sin(\widehat{HBA}) = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{AH}{\sqrt{3}}$ donc $AH = \sqrt{3} \times \sin(\widehat{HBA}) = \sqrt{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3}{2}$

Exercice 3 (6 pts) :

1. $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$
   $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$
   $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$
   $AB = BC \neq AC$ donc ABC est isocèle en B
   de plus
   $AC^2 = 52$ et $AB^2 + BC^2 = 26 + 26 = 52$ donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$
   d'après la réciproque du théorème de Pythagore ABC est rectangle isocèle en B.
2. On note I le milieu de $[AB]$ donc les coordonnées de I sont $\left(-\dfrac{5}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$
   I est aussi le milieu de $[CD]$ car $ACBD$ est un parallélogramme, donc :
   ▷ $x_I = \dfrac{x_C + x_D}{2} \iff -\dfrac{5}{2} = \dfrac{3 + x_D}{2} \iff x_D = -8$
   ▷ $y_I = \dfrac{y_C + y_D}{2} \iff \dfrac{1}{2} = \dfrac{2 + y_D}{2} \iff y_D = -1$
   donc les coordonnées de D sont $D(-8; -1)$

Exercice 4 (4 pts) :

1. Propriété : Si $x = 3$ alors $(x - 1)^2 - 4 = 0$ (Vraie)
   Réciproque : Si $(x - 1)^2 - 4 = 0$ alors $x = 3$ (Fause)
   Contraposée : Si $(x - 1)^2 - 4 \neq 0$ alors $x \neq 3$ (Vraie)
2. Propriété : Si je pense alors j'existe. (Vraie)
   Réciproque : Si j'existe alors je pense (Fausse)
   Contraposée : Si je n'existe pas alors je ne pense pas. (Vraie)

Exercice facultatif/Bonus/Supplémentaire (2 pts) :

1. Si α vérifie $f(\alpha) = \alpha$ alors $\sqrt{3\alpha + 1} = \alpha$ alors $3\alpha + 1 = \alpha^2$ donc $\dfrac{3\alpha + 1}{\alpha} = \dfrac{\alpha^2}{\alpha}$ donc $3 + \dfrac{1}{\alpha} = \alpha$ donc $\dfrac{1}{\alpha} = \alpha - 3$