Exercice 01 :

1. $f(x) = x^2 - (2x+3)^2 = x^2 - (4x^2+12x+9) = x^2 - 4x^2 - 12x - 9 = -3x^2 - 4x^2 - 12x - 9 = \boxed{-3x^2 - 12x - 9}$
2. $f(x) = x^2 - (2x+3)^2 = [x + (2x+3)][x - (2x+3)] = (x+2x+3)(x-2x-3) = \boxed{(3x+3)(-x-3)}$
3. $f(-2) = -3(-2)^2 - 12(-2) - 9 = -12 + 24 - 9 = 3$ donc $\boxed{f(-2) = 3}$
4. $f(3\sqrt{2}) = -3(3\sqrt{2})^2 - 12(3\sqrt{2}) - 9 = -3 \times 18 - 36\sqrt{2} - 9 = -54 - 9 - 36\sqrt{2} = -63 - 36\sqrt{2}$ donc $\boxed{f(3\sqrt{2}) = -63 - 36\sqrt{2}}$
5. $f\left(1 - \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 12 \times \frac{1}{2} - 9 = -\frac{3}{4} - 6 - 9 = -\frac{3}{4} - 15 = -\frac{63}{4}$ donc $\boxed{f\left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{63}{4}}$
6. $f(x) = 0$
   $\iff (3x+3)(-x-3) = 0$
   $\iff 3x + 3 = 0$ ou $-x - 3 = 0$
   $\iff 3x = -3$ ou $-x = 3$
   $\iff x = -1$ ou $x = -3$
   Donc $\boxed{S = \{-3; -1\}}$
7. $f(x) = -9$
   $\iff -3x^2 - 12x - 9 = -9$
   $\iff -3x^2 - 12x = 0$
   $\iff -3x(x+4) = 0$
   $\iff -3x = 0$ ou $x + 4 = 0$
   $\iff x = 0$ ou $x = -4$
   Donc $\boxed{S = \{-4; 0\}}$

Exercice 02 :

On note $x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + ...}}}}$ (racine infinie)

1. $x^2 = (\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + ...}}}})^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + ...}}}$
   $x + 1 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + ...}}}}$
   On obtient donc que x est solution de l'équation $\boxed{x^2 = x + 1}$
2. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0$
   $\iff x^2 - 2 \times \frac{1}{2} \times x + \frac{1}{4} - \frac{5}{4}$
   $\iff x^2 - x - 1 = 0$
   $\iff x^2 = x + 1$
3. L'équation $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0$ est du deuxième degré :
   $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0$
   $\iff \left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 0$
   $\iff x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = 0$ ou $x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = 0$
   $\iff x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ ou $x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$
   Donc les solutions de cette équation sont $x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ et $x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$
   Or $x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + ...}}}}$ est un nombre positif donc

$$\boxed{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + ...}}}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}$$