Géométrie analytique

(En seconde)

Dernière mise à jour : Dimanche 31 Octobre 2010

Vincent OBATON, Enseignant au lycée Stendhal de Grenoble (Année 2010-2011)

J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion.

Stendhal

Table des matières

1 Un peu de logique

On nomme une proposition ou propriété une phrase de la forme :

Si ...... alors ......
Si A est vraie alors B est vraie.

Dans ce cas on nomme propriété réciproque, la propriété suivante :

Si B est vraie alors A est vraie.

et la propriété contraposée :

Si B est fausse alors A est fausse.

Remarque importante :
Si une propriété est vraie alors sa contraposée est vraie aussi et réciproquement.
Exemple :

1. Prorpiété : Si $x = -3$ alors $x^2 = 9$ (Vraie)
   Réciproque : Si $x^2 = 9$ alors $x = -3$ (Fausse car $x = 3$ aussi)
   Contraposée :Si $x^2 \neq 9$ alors $x \neq -3$
2. Théorème de pythagore :
   Propriété :Si ABC rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$
   Réciproque : Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors ABC rectangle en A
   Contraposée :Si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ alors ABC n'est pas rectangle en A.

Exemple d'utilisation de la contraposée :
ABC est un triangle tel que $AB = 3$, $BC = 5$ et $AC = 6$
Est-il rectangle ?
$AC^2 = 6^2 = 36$
$AB^2 + BC^2 = 3^2 + 5^2 = 3 + 25 = 34$
donc $AC^2 \neq AB^2 + BC^2$ et AC est la longueur la plus grande, donc d'après la contraposée de la propriété de Pythagore ABC n'est pas rectangle.

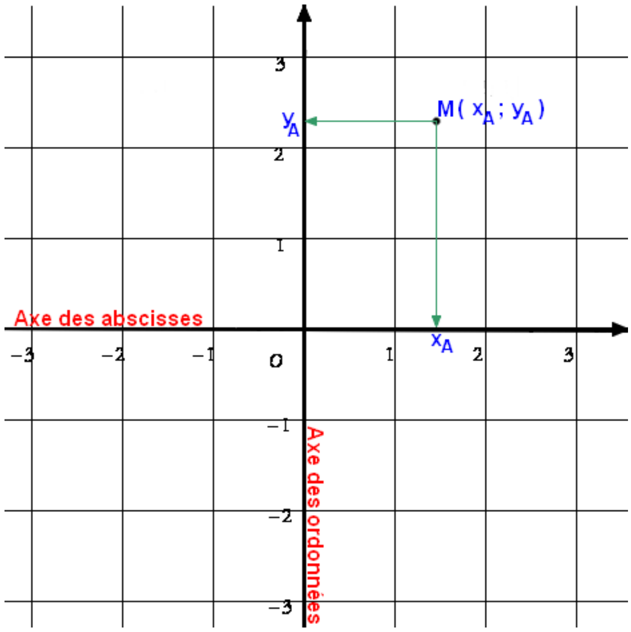
2 Quelques rappels

Voir la fiche de cours sur le site Internet.

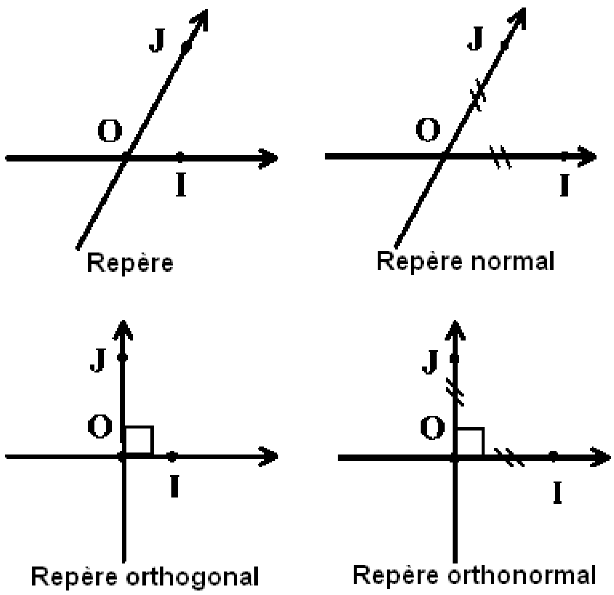
3 Géométrie analytique : Points, distances et milieux

3.1 Définition et vocabulaire

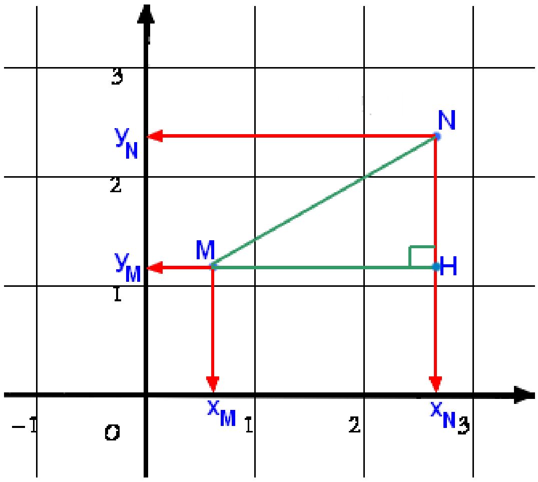
En géométrie analytique, tous les objets sont décrits relativement à un repère à l'aide de coordonnées.
Repère :



Quelques repères particuliers :



3.2 Distance entre deux points dans un repère orthogonal



On souhaite déterminer la distance MN en fonction des coordonnées de $M(x_M, y_M)$ et de $N(x_N, y_N)$.
Le triangle MNH est rectangle en H donc on peut utiliser la propriété de Pythagore :
$MN^2 = MH^2 + HN^2 = (x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2$
or $(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2$ est positif donc on peut calculer sa racine carrée
donc
$MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$ ou $MN = -\sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$
or MN est une longueur donc positive donc $MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$

Conclusion :
On note (O, OI, OJ) un repère orthogonal.
Si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ alors $\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$

Exercice :
(O, OI, OJ) est un repère orthogonal.
$A(3; -5)$ et $B(-2; -3)$

1. Placer les points A et B
2. Calculer AB, CB et CA
3. ABC est-il rectangle ? isocèle ? équilatéral ?

3.3 Coordonnées du milieu d'un segment

On note (O, OI, OJ) un repère orthogonal.
On note $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ les coordonnées de A et B.
Les coordonnées du milieu du segment $[AB]$ sont données par la formule :

$$\boxed{I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)}$$

3.4 Exemples

4 Géométrie analytique : Les droites

4.1 Définition d'une équation de droite

Une droite (AB) est l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan qui sont alignés avec A et B.
Tous les points M de cette droite ont des coordonnées x et y qui vérifient toutes la même relation.
Cette relation, entre x et y, se nomme l'équation cartésienne de la droite (AB)

Définition :
L'équation cartésienne d'une droite est la relation algébrique entre les abscisses et les ordonnées, qui est vérifiée par les coordonnées de tous ses points. L'équation cartésienne d'une droite est donc de la forme :

$$ax + by + c = 0$$

avec a, b et c des réels.

Définition :
L'équation cartésienne réduite d'une droite est la relation algébrique entre les abscisses et les ordonnées de la forme :

$$y = mx + p$$

avec m et p des réels.

y a-t-il un lien entre les deux équations ?
Si $b \neq 0$ alors $ax + by + c = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ donc $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$
On donnera souvent l'équation réduite au lieu de l'équation cartésienne car elle est unique et tous les élèves trouveront la même alors qu'il y a plusieurs équations cartésiennes différentes pour une même droite.

Exemple :
Si la droite (Δ) a pour équation cartésienne $x - y + 5 = 0$ alors $2x - 2y + 10 = 0$ est aussi une équation cartésienne de (Δ) ainsi que $3x - 3y = -15$ et que $y - x = 5$ etc ...
Alors que $y = x + 5$ est l'équation réduite de (Δ) et qu'il n'y en pas d'autre possible.

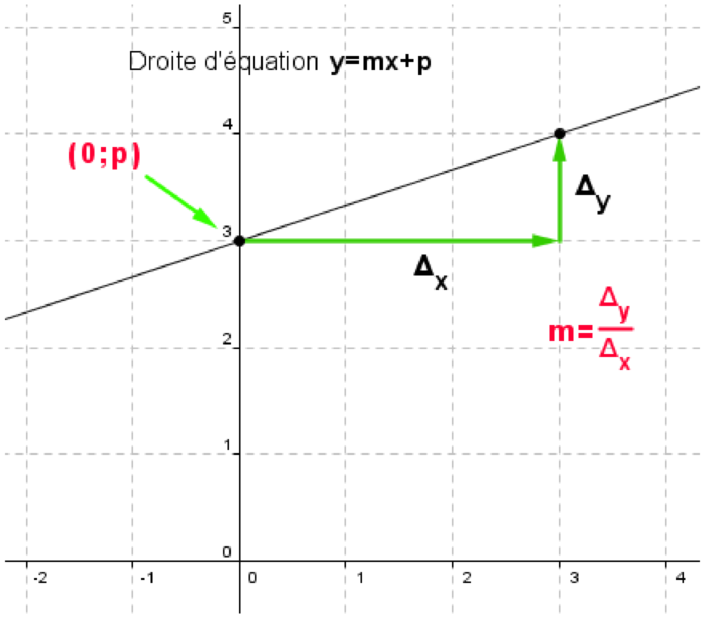
Vocabulaire :
Dans une équation réduite de droite de la forme $y = mx + p$ alors :
m se nomme **le coefficent directeur** de la droite ou **la pente** de la droite.

p se nomme **l'ordonnée à l'origine**, de la droite.

4.2 Tracer une droite connaissant son équation

On note (Δ) la droite d'équation $y = mx + p$

1. **Méthode graphique :**
   On place le point de coordonnées $(0, p)$
   On transforme m sous forme fractionnaire et on nomme Δ_y son numérateur puis Δ_x son dénominateur en gardant les signes.
   On trace la pente comme dans le schéma ci-dessous :



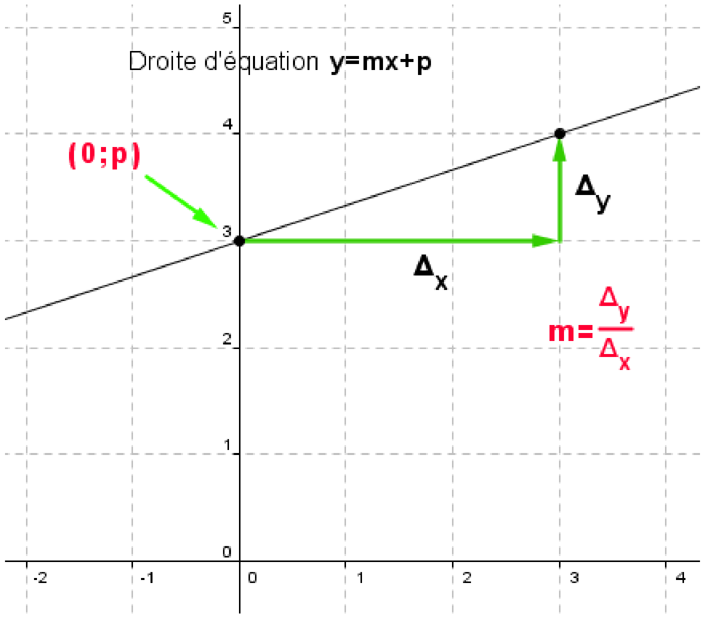
2. **Méthode algébrique :**
   On complète un tableau de valeurs en choisissant les x et en calculant les y.

x	x_A	x_B	x_C
y	y_A	y_B	y_C

   On place ensuite les trois points A, B et C puis la droite passant par ces points.

4.3 Déterminer l'équation d'une droite tracée

1. Méthode graphique :



Il suffit de lire la valeur de Δ_x et de Δ_y puis de calculer m.
Ensuite il reste à lire la valeur de p si cela est possible ou de la calculer en utilisant la formule du cours :

$$p = y_A - mx_A$$

2. Méthode algébrique :
   On relèvre les coordonnées de deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ de la droite.
   On calcule m :

$$m = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

   Il reste donc à calculer p, en utilisant le formule :

$$p = y_A - mx_A$$

4.4 Déterminer l'équation d'une droite passant par deux points

Voir la méthode algébrique ci-dessus.

4.5 Alignements

Pour montrer que trois points $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$ sont alignés il y a plusieurs méthodes possibles :

1. Si on connaît l'équation d'une droite passant par deux de ces points alors il suffit de vérifier que les coordonnées du troisième point vérifient cette équation.

2. On peut montrer que (AB) et (AC) ont le même coefficient directeur ou la même pente et donc montrer que :

$$m_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = m_2 = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}$$

3. Si on connaît l'équation réduite de (AB) et (AC) , il suffit de montrer que les droites sont parallèles et donc de même pente.
4. À voir suivant l'exercice à résoudre ....

4.6 Droites parallèles, droites perpendiculaires et droites sécantes

Activités :
Tracer les trois droites suivantes :

1. (D_1) : $y = \frac{3}{2}x - 5$
2. (D_2) : $y = -\frac{2}{3}x - 5$
3. (D_3) : $y = 1,5x + 3$

Que remarquez-vous ?

Conclusion :
On note (D) la droite d'équation réduite $y = m_1x + p_1$ et (Δ) celle d'équation $y = m_2x + p_2$

1. Si $m_1 = m_2$ et $p_1 = p_2$ alors (D) et (Δ) sont confondues
2. Si $m_1 = m_2$ et $p_1 \neq p_2$ alors (D) et (Δ) sont parallèles non confondues.
3. Si $m_1 \neq m_2$ alors (D) et (Δ) sont sécantes
4. Si $m_1m_2 = -1$ alors (D) et (Δ) sont perpendiculaires.

4.7 Coordonnées du point d'intersection entre deux droites

On note (D) la droite d'équation réduite $y = m_1x + p_1$ et (Δ) celle d'équation $y = m_2x + p_2$
On cherche à déterminer algébriquement les coordonnées du point d'intersection entre les deux droites si celui-ci existe.
On note $M(x_M, y_M)$ ce point d'intersection.
Les coordonnées du point vérifient l'équation de (D) et celle de (Δ), il faut donc résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} y_M = m_1x_M + p_1 \\ y_M = m_2x_M + p_2 \end{cases}$$

4.8 Application à la résolution de systèmes

On nomme S le système $\left\{\begin{array}{l} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{array}\right.$

On souhaite savoir rapidement s'il admet des solutions ou pas, avant de le résoudre.
On suppose que $b \neq 0$ et $b' \neq 0$
On transforme les équations de droites pour obtenir des équations réduites :

$$\left\{\begin{array}{l} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b} \\ y=-\dfrac{a'}{b'}x-\dfrac{c'}{b'} \end{array}\right.$$

Si $\dfrac{a}{b}=\dfrac{a'}{b'} \Leftrightarrow \boxed{ab'-ba'=0}$ et si $\dfrac{c}{b}=\dfrac{c'}{b'} \Leftrightarrow \boxed{cb'-bc'=0}$
alors les droites sont confondues et les solutions sont les coordonnées de tous les points de la droite.

Si $\dfrac{a}{b}=\dfrac{a'}{b'} \Leftrightarrow \boxed{ab'-ba'=0}$ et si $\dfrac{c}{b}\neq\dfrac{c'}{b'} \Leftrightarrow \boxed{cb'-bc'\neq 0}$
alors les droites sont parallèles non confondues donc il n'y a aucun point d'intersection.

Si $\dfrac{a}{b}\neq\dfrac{a'}{b'} \Leftrightarrow \boxed{ab'-ba'\neq 0}$
alors les droites sont sécantes et il y a un seul point d'intersection et donc un couple unique solution du système. Il reste donc à la résoudre.

4.9 Résolution de problèmes géométriques à l'aide des droites

A voir dans les exercices ...