

Équations et problèmes

Vincent Obaton

Lycée Stendhal de Grenoble

24 août 2009

Chapitre 0 : Équations et problèmes

Classe de seconde

L'objectif de ce cours est comment résoudre, les différentes équations rencontrées en seconde.

- ① Les équations du premier degré.
- ② Les équations de degré supérieur à 1.
- ③ Les équations rationnelles.
- ④ Les autres cas possibles.
- ⑤ Résolution des problèmes.

Chapitre 0 : Équations et problèmes

Équations du premier degré

Les équations du premier degré

On nomme équation du premier degré, les équations dont l'exposant de la (ou les) variable(s) est au plus égal à 1.

Exemples :

$$E_1 : 3x + 7 = 0$$

$$E_2 : 5 - 3x = 7x + 3$$

$$E_3 : \frac{1}{2}x + 7 = \frac{4}{5} - 2x$$

$$E_4 : (3x - 1)(2x + 5) = (7 - 3x)(1 - 2x)$$

Contre-Exemples :

$$E_1 : x^2 = 5$$

$$E_2 : (x - 4)^2 - 7 = 0$$

$$E_4 : (3x - 1)(2x + 5) = (7 - 5x)(1 - 2x)$$

$$E_5 : x^3 = x^2 - 1$$

Chapitre 0 : Équations et problèmes

Équations du premier degré

Méthode de résolution des équation du premier degré à une inconnue.

La méthode générale est la suivante :

Développer chacun des membres



Réduire chacun des membres



Faire apparaître la variable dans un membre et le reste dans l'autre



Résoudre l'équation de la forme $ax = b$ que vous avez obtenu



Donner l'ensemble des solutions sous la forme $S = \{...\}$

Chapitre 0 : Équations et problèmes

Équations du premier degré

Exemple 01 :

Résoudre l'équation suivante : $4x - 5 = 7 - 8x$

$$4x - 5 = 7 - 8x$$

est équivalente à : $4x + 8x = 7 + 5$

est équivalente à : $12x = 12$

est équivalente à : $x = 1$

L'ensemble des solutions est $S = \{1\}$.

Au lieu d'écrire "est équivalente à", on peut utiliser le symbole mathématique : $\Leftrightarrow$.

Chapitre 0 : Équations et problèmes

Équations du premier degré

Exemple 02 :

Résoudre l'équation suivante : $(2x + 3)(x - 7) = (5 - 2x)(4 - x)$

$$(2x + 3)(x - 7) = (5 - 2x)(4 - x)$$

est équivalente à : $2x^2 - 14x + 3x - 21 = 20 - 5x - 8x + 2x^2$

est équivalente à : $2x^2 - 11x - 21 = 20 - 6x + 2x^2$

est équivalente à : $-11x + 6x = 21 + 20$

est équivalente à : $-5x = 41$

est équivalente à : $x = -\frac{41}{5} = -8,2$

L'ensemble des solutions est $S = \left\{ -\frac{41}{5} \right\}$.

Au lieu d'écrire "est équivalente à", on peut utiliser le symbole mathématique : $\Leftrightarrow$.

Chapitre 0 : Équations et problèmes

Équations de degré supérieur à 1

Équations de degré supérieur à 1

On nomme équation de degré supérieur à 1, les équations dont l'exposant de la (ou les) variable(s) est supérieur strictement à 1.

Exemples :

$$E_1 : x^2 = 5$$

$$E_2 : (x - 4)^2 - 7 = 0$$

$$E_4 : (3x - 1)(2x + 5) = (5 - 7x)(2x + 5)$$

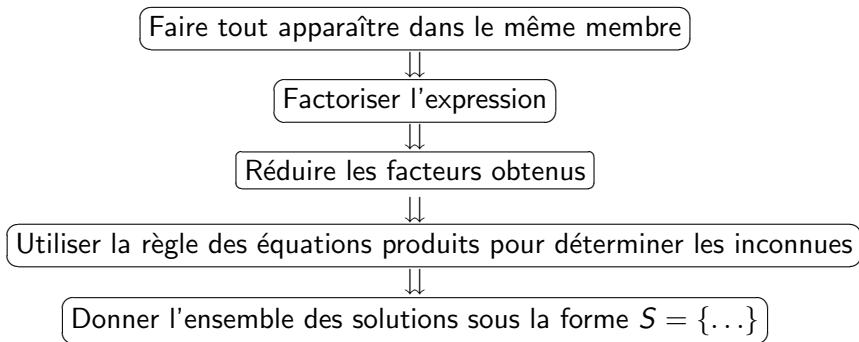
$$E_5 : x^3 = x^2 - 1$$

Chapitre 0 : Équations et problèmes

Équations de degré supérieur à 1

Méthode de résolution des équation de degré supérieur à 1 et à une inconnue.

La méthode générale est la suivante :



Chapitre 0 : Équations et problèmes

Équations de degré supérieur à 1

Exemple 03 :

Résoudre l'équation suivante : $x^2 = 5$

$$x^2 = 5$$

est équivalente à : $x^2 - 5 = 0$

est équivalente à : $(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) = 0$

est équivalente à : $x + \sqrt{5} = 0$ ou $x - \sqrt{5} = 0$

est équivalente à : $x = -\sqrt{5}$ ou $x = \sqrt{5}$

L'ensemble des solutions est $S = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$.

Au lieu d'écrire "est équivalente à", on peut utiliser le symbole mathématique : $\Leftrightarrow$.

Chapitre 0 : Équations et problèmes

Équations de degré supérieur à 1

Exemple 04 :

Résoudre l'équation suivante : $(3x - 1)(2x + 5) = (5 - 7x)(2x + 5)$

$$(3x - 1)(2x + 5) = (5 - 7x)(2x + 5)$$

est équivalente à : $(3x - 1)(2x + 5) - (5 - 7x)(2x + 5) = 0$

est équivalente à : $(2x + 5)[(3x - 1) - (5 - 7x)] = 0$

est équivalente à : $(2x + 5)[3x - 1 - 5 + 7x] = 0$

est équivalente à : $(2x + 5)(10x - 6) = 0$

est équivalente à : $2(2x + 5)(5x - 3) = 0$

est équivalente à : $2x + 5 = 0$ ou $5x - 3 = 0$

est équivalente à : $x = -\frac{5}{2}$ ou $x = \frac{3}{5}$

L'ensemble des solutions est $S = \left\{ -\frac{5}{2}; \frac{3}{5} \right\}$.

Au lieu d'écrire "est équivalente à", on peut utiliser le symbole mathématique : $\Leftrightarrow$.

Chapitre 0 : Équations et problèmes

Équations de degré supérieur à 1

Exemple 05 :

Résoudre l'équation suivante : $4(x - 2)^2 - 7 = 9$

$$4(x - 2)^2 - 7 = 9$$

$$\Leftrightarrow 4(x - 2)^2 - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow [2(x - 2)]^2 - (4)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow [2(x - 2) + 4][2(x - 2) - 4] = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - 4 + 4)(2x - 4 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x(2x - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x(x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x = 0 \text{ ou } x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 4$$

L'ensemble des solutions est $S = \{0; 4\}$.

Chapitre 0 : Équations et problèmes

Équations rationnelles

Les équations rationnelles

On nomme équation rationnelle, les équations qui contiennent des écritures rationnelles avec des inconnues au dénominateur.

Exemples :

$$E_1 : \frac{2x+1}{x-7} = 1 \quad E_2 : 5 = \frac{1}{3x-7} \quad E_3 : \frac{5x-1}{2x+3} = \frac{2x+3}{5x-1}$$

Remarque importante : Une écriture rationnelle, existe si et seulement si son dénominateur n'est pas nul.

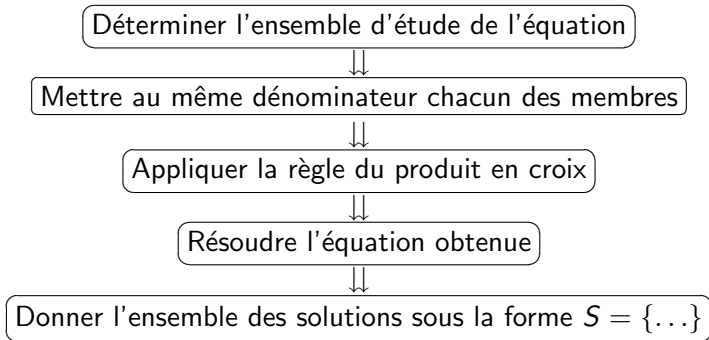
Exemple : $\frac{3x-2}{5x-1}$ existe si et seulement si $5x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{5}$

On dira alors que son domaine d'étude est l'ensemble des réels privé de la (ou les) valeur(s) interdite(s) : $\frac{1}{5}$.

$$\text{On notera : } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{5} \right\}$$

Méthode de résolution des équation rationnelles à une inconnue.

La méthode générale est la suivante :



Chapitre 0 : Équations et problèmes

Équations rationnelles

Exemple 06 :

Résoudre l'équation suivante : $\frac{2x+1}{x-7} = 1$

L'équation existe si et seulement si $x - 7 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 7$

L'ensemble d'étude est donc : $D = \mathbb{R} \setminus \{7\}$

$$\frac{2x+1}{x-7} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 = x - 7 \text{ et } x \neq 7$$

$$\Leftrightarrow 2x - x = -1 - 7 \text{ et } x \neq 7$$

$$\Leftrightarrow x = -8 \text{ et } x \neq 7$$

L'ensemble des solutions est $S = \{-8\}$.

Chapitre 0 : Équations et problèmes

Équations rationnelles

Exemple 07 :

Résoudre l'équation suivante : $5 = \frac{1}{3x - 7}$

L'équation existe si et seulement si $3x - 7 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{7}{3}$

L'ensemble d'étude est donc : $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{7}{3} \right\}$

$$5 = \frac{1}{3x - 7}$$

$$\Leftrightarrow 5(3x - 7) = 1 \text{ et } x \neq \frac{7}{3} \quad \Leftrightarrow 15x - 35 = 1 \text{ et } x \neq \frac{7}{3}$$

$$\Leftrightarrow 15x = 36 \text{ et } x \neq \frac{7}{3} \quad \Leftrightarrow x = \frac{36}{15} \text{ et } x \neq \frac{7}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{12}{5} \text{ et } x \neq \frac{7}{3}$$

L'ensemble des solutions est $S = \left\{ \frac{12}{5} \right\}$.

Chapitre 0 : Équations et problèmes

Équations rationnelles

Exemple 08 :

Résoudre l'équation suivante : $\frac{5x-1}{2x+3} = \frac{2x+3}{5x-1}$

L'équation existe si et seulement si $2x+3 \neq 0$ et $5x-1 \neq 0$

$$\Leftrightarrow x \neq -\frac{3}{2} \text{ et } x \neq \frac{1}{5}$$

L'ensemble d'étude est donc : $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2}; \frac{1}{5} \right\}$

$$\frac{5x-1}{2x+3} = \frac{2x+3}{5x-1}$$

$$\Leftrightarrow (5x-1)^2 = (2x+3)^2 \text{ et } x \notin \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2}; \frac{1}{5} \right\}$$

$$\Leftrightarrow (5x-1)^2 - (2x+3)^2 = 0 \text{ et } x \notin \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2}; \frac{1}{5} \right\}$$

Chapitre 0 : Équations et problèmes

Équations rationnelles

$$\Leftrightarrow (5x - 1 + 2x + 3)(5x - 1 - 2x - 3) = 0 \text{ et } x \notin \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2}; \frac{1}{5} \right\}$$

$$\Leftrightarrow (7x + 2)(3x - 4) = 0 \text{ et } x \notin \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2}; \frac{1}{5} \right\}$$

$$\Leftrightarrow 7x + 2 = 0 \text{ ou } 3x - 4 = 0 \text{ et } x \notin \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2}; \frac{1}{5} \right\}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{7} \text{ ou } x = \frac{4}{3} \text{ et } x \notin \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2}; \frac{1}{5} \right\}$$

$$\text{L'ensemble des solutions est } S = \left\{ -\frac{2}{7}; \frac{4}{3} \right\}.$$

Chapitre 0 : Équations et problèmes

Autres cas d'équations

Les autres cas d'équations

Il reste d'autres cas où il faut faire preuve d'un peu de réflexion et d'intuition pour résoudre certaines équations particulières.

Exemples :

$$E_1 : \sqrt{2x - 5} = 5$$

$$E_2 : x^2 - 4x = 32$$

Chapitre 0 : Équations et problèmes

Autres cas d'équations

Exemple 09 :

Résoudre l'équation suivante : $\sqrt{2x - 5} = 5$

L'équation existe si et seulement si $2x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}$

L'ensemble d'étude est donc : $D = \left[\frac{5}{2}; +\infty \right[$

$$\sqrt{2x - 5} = 5$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2x - 5})^2 = 25 \text{ et } x \in \left[\frac{5}{2}; +\infty \right[$$

$$\Leftrightarrow 2x - 5 = 25 \text{ et } x \in \left[\frac{5}{2}; +\infty \right[$$

$$\Leftrightarrow 2x = 30 \text{ et } x \in \left[\frac{5}{2}; +\infty \right[$$

$$\Leftrightarrow x = 15 \text{ et } x \in \left[\frac{5}{2}; +\infty \right[$$

L'ensemble des solutions est $S = \{15\}$.

Chapitre 0 : Équations et problèmes

Autres cas d'équations

Exemple 10 :

Résoudre l'équation suivante : $x^2 - 4x = 32$

$$x^2 - 4x = 32$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 - 4 = 32$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 - 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 - (6)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2 - 6)(x - 2 + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 8)(x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 8 = 0 \text{ ou } x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 8 \text{ ou } x = -4$$

L'ensemble des solutions est $S = \{-4; 8\}$.

Chapitre 0 : Équations et problèmes

Résolutions des problèmes

Résolutions des problèmes

Il reste donc maintenant à savoir résoudre les problèmes dont les équations permettent de trouver les solutions. La méthode générale est la suivante :

Nommer les inconnues du problème que l'on va résoudre.



Traduire le problème par une équation.



Résoudre l'équation obtenue.



Répondre au problème.

Chapitre 0 : Équations et problèmes

Résolutions des problèmes

Exemple 11 :

Le père a 26 ans de plus que son fils.

Dans 10 ans son âge sera le triple de celui de son fils.

Déterminer l'âge du fils et celui du père.

- 1 Nommons les inconnues du problème.

On note x l'âge du père et y l'âge du fils.

- 2 Traduction du problème par une équation :

L'âge du père est donné par les équations :

$$x = y + 26 \text{ et } x + 10 = 3y$$

$$\text{donc } x = y + 26 \text{ et } x = 3y - 10$$

On obtient donc l'équation : $y + 26 = 3y - 10$

- 3 Résolution de l'équation :

$$y + 26 = 3y - 10 \Leftrightarrow 36 = 2y \Leftrightarrow y = 18$$

- 4 Solution du problème :

Le père a 44 ans et le fils 18 ans.