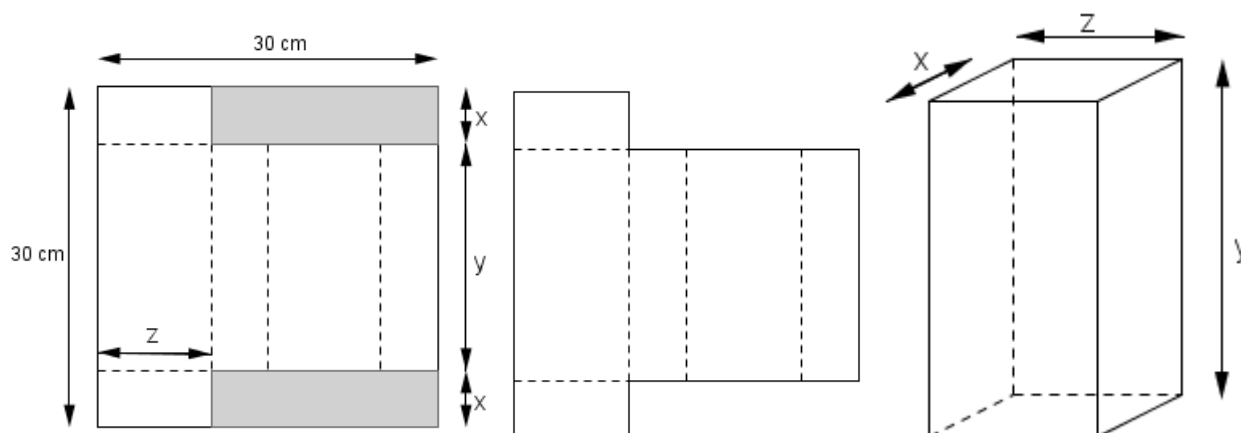


Devoir à la maison numéro 06 (2nde D et 2nde C) : **A rendre avant jeudi 26 Novembre 2010**

**Exercice :**

Un fabricant envisage la production des boîtes de lait en carton obtenues en découpant deux bandes (grisées sur le premier dessin) de même longueur  $x$  (cm) dans une feuille carrée de côté 30 cm et pliant suivant les pointillés.

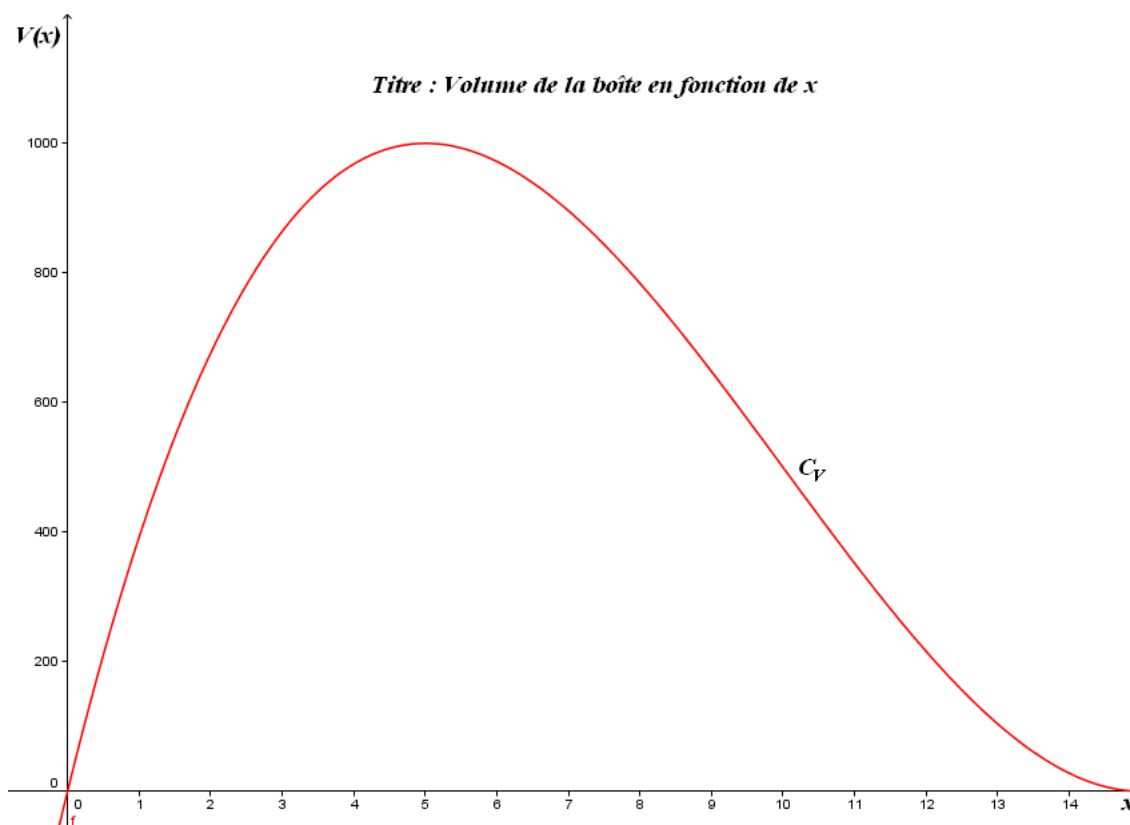


**Partie A** Construction d'une fonction  $V$  :

1. Quelles valeurs peut prendre  $x$  ?
2. Déterminer le volume de la boîte lorsque  $x = 10$  cm.
3. Déterminer  $y$  et  $z$  en fonction de  $x$ .
4. On nomme  $V : x \mapsto$  Volume de la boîte en fonction de  $x$   
Exprimer  $V(x)$  en fonction de  $x$ .
5. Quel est le domaine de définition de  $V$  ?
6. Démontrer que pour tout  $x \in D_V$ , on a  $V(x) = 2x(x - 15)^2$
7. Le fabricant veut obtenir des boîtes à base carrée. Quelle valeur de  $x$  peut-il prendre ?

**Partie B** Étude graphique de la fonction  $V$  :

On a tracé ci-dessous la courbe  $C_V$  représentative de  $V$  dans un repère orthogonal.



1. Déterminer graphiquement les antécédents de 500 par  $V$ .
2. Quel est le maximum de  $V$  sur  $[0; 15]$  ?
3. En quelle valeur ce maximum est-il atteint ?
4. Dresser le tableau des variations de la fonction  $V$ .

**Partie C** Étude algébrique de  $V(x) = 500$  :

1. Démontrer que  $V(x) = 500$  est équivalente à  $2x^3 - 60x^2 + 450x - 500 = 0$
2. Déterminer trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $2x^3 - 60x^2 + 450x - 500 = (x - 10)(ax^2 + bx + c)$
3. Démontrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $2x^2 - 40x + 50 = 2(x - 10 - 5\sqrt{3})(x - 10 + 5\sqrt{3})$
4. En déduire les solutions sur  $D_V$  de l'équation  $V(x) = 500$

**Partie D** Étude algébrique du maximum de  $V$  :

1. Exprimer  $V(x) - V(5)$  en fonction de  $x$ .
2. Démontrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $V(x) - V(5) = 2(x - 20)(x - 5)^2$
3. Quel est le signe de  $(x - 5)^2$  ? (Expliquer)
4. Quel est le signe de  $(x - 20)$  sachant que  $x \in [0; 15]$  ? (Expliquer)
5. En déduire le signe de  $V(x) - V(5)$  pour tout  $x \in [0; 15]$ .
6. Que peut-on en déduire sur  $V(x)$  et  $V(5)$  pour  $x \in [0; 15]$  ?
7. Conclure.