Exercice :

On note (O, OI, OJ) un repère orthonormé et $A\left(-1; \frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1; \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\right)$ et enfin $D\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-1; \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\right)$

1. Les coordonnées de Z sont $\left(\frac{x_B+x_D}{2}; \frac{y_B+y_D}{2}\right)$ donc $\boxed{Z\left(-1; \frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)}$

2. Si $ABCD$ est un parallélogramme alors Z est aussi le milieu de $[AC]$ donc $x_Z = \frac{x_A+x_C}{2}$ et $y_Z = \frac{y_A+y_C}{2}$

   donc $x_C = 2x_Z - x_A = -2+1 = -1$ et $y_C = 2y_Z - y_A = 2\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \sqrt{2}+\frac{1}{2}$

   donc $\boxed{C\left(-1; \sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)}$

3. ABD est un triangle

   $BD^2 = (x_D-x_B)^2+(y_D-y_B)^2 = (\sqrt{2})^2+(0)^2 = 2$

   $BA^2+DA^2 = (x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(x_A-x_D)^2+(y_A-y_D)^2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 2$

   donc $BD^2 = BA^2+DA^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle ABD est rectangle en A.

4. Que peut-on en déduire sur la nature du quadrilatère $ABCD$?

   $AB^2 = (x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$ donc $AB = 1$

   $AD^2 = (x_D-x_A)^2+(y_D-y_A)^2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$ donc $AD = 1$

   $BC^2 = (x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$ donc $BC = 1$

   $CD^2 = (x_D-x_C)^2+(y_D-y_C)^2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$ donc $CD = 1$

   ABD est rectangle en A et $AB = AD = BC = DC1$ donc $ABCD$ est un carré de côté 1 unité de longueur.

5. On note I le milieu de $[AB]$ et $\mathcal{C}$ le cercle de centre I et de rayon IC.

   (a) Les coordonnées de I sont $(x_I; y_I)$ avec :
   $x_I = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}-1$ et $y_I = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}$
   donc $\boxed{I\left(\frac{\sqrt{2}}{4}-1; \frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}\right)}$

   (b) I est le milieu de AB donc $\boxed{IB = \frac{1}{2}}$

   (c) Le rayon de $\mathcal{C}$ est la longueur IC.
   Le triangle IBC est rectangle en B donc d'après le théorème de Pythagore :
   $IC^2 = IB^2+BC^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2 = \frac{1}{4}+1 = \frac{5}{4}$ donc $\boxed{IC = \frac{\sqrt{5}}{2}}$

   (d) IDA est le même triangle rectangle que IBC donc de la même façon $\boxed{ID = \frac{\sqrt{5}}{2}}$

6. On note P l'intersection entre $\mathcal{C}$ et $[IB)$

   (a) $AP = AI+IP = AI+IC = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ donc $\boxed{AP = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

   (b) $\frac{AP}{AB} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
   $\frac{AB}{BP} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
   donc $\boxed{\frac{AP}{AB} = \frac{AB}{BP} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

7. On note ϕ le nombre d'or.

   (a) $\phi^{-1} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$
   donc $\boxed{\phi^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

(b) $\phi^2 = \left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 = \dfrac{5+2\sqrt{5}+1}{4} = \dfrac{6+2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

$\phi + 1 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} + 1 = \dfrac{\sqrt{5}+1+2}{2} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

donc ϕ est bien une solution de $x^2 = x+1$

(c) $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{5}{4} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x + \dfrac{1}{4} - \dfrac{5}{4} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = x + 1$

(d) $x^2 = x+1 \Leftrightarrow \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x - \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2} = 0$ ou $x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ donc $x = \phi$ ou $x = -\phi^{-1}$

donc $\boxed{S = \{-\phi^{-1}; \phi\}}$

(e) ϕ est solution de $\phi^2 = \phi + 1$ et $\phi \neq 0$ donc $\dfrac{\phi^2}{\phi} = \dfrac{\phi}{\phi} + \dfrac{1}{\phi}$

donc $\phi = 1 + \phi^{-1}$ donc $\boxed{\phi^{-1} = \phi - 1}$

de plus

$\dfrac{\phi+1}{\phi-1} = \dfrac{\phi^2}{\phi-1} = \phi^{2-(-1)} = \phi^3$ donc $\boxed{\dfrac{\phi+1}{\phi-1} = \phi^3}$

8. **Pour ceux qui souhaitent aller plus loin sur le nombre d'or**. (Partie non obligatoire)
Nous allons montrer que ϕ ne peut pas être un nombre rationnel, qu'il ne peut pas se mettre sous la forme d'une fraction irréductible.

(a) On suppose que ϕ s'écrive sous la forme d'une fraction irréductible $\dfrac{p}{q}$ avec p un entier naturel et q un entier naturelle non nul. p et q peuvent-ils être tous les deux pairs ?
Non, car autrement 2 serait un diviseur commun de p et q or ce n'est pas possible puisque la fraction est irréductible.

(b) $\phi^2 = \phi + 1$ donc $\dfrac{p^2}{q^2} = \dfrac{p}{q} + 1$ donc $\boxed{p^2 = pq + q^2}$

(c) $p^2 = pq + q^2$ donc $p^2 - q^2 = pq$

(d) Si p et q sont tous les deux impairs alors pq est impair, p^2 est impair, q^2 est impair et $p^2 - q^2$ est pair.

(e) Si p est pair et q impair alors pq est pair, p^2 est pair, q^2 est impair et $p^2 - q^2$ est impair.
Si p est impair et q pair alors pq est pair, p^2 est impair, q^2 est pair et $p^2 - q^2$ est impair.

(f) On voit dans les questions ci-dessus que pq et $p^2 - q^2$ sont de parité différentes dans tous les cas donc on ne peut pas avoir $p^2 - q^2 = pq$ donc ϕ ne peut pas se mettre sous forme de fraction et c'est donc un irractionnel.