Exercice 1 :

1. $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(1+2)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = \boxed{3\sqrt{5}}$
   $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = \boxed{2\sqrt{5}}$
   $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(5+2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{49+16} = \boxed{\sqrt{65}}$
2. ABC est un triangle
   $AC^2 = (\sqrt{65})^2 = 65$
   $AB^2 + BC^2 = (\sqrt{45})^2 + (\sqrt{20})^2 = 45 + 20 = 65$
   donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$ et d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est rectangle en B.
3. ABC est un triangle rectangle en B donc le centre de son cercle circonscrit est au milieu de l'hypoténuse donc K est le milieu de $[AC]$. D'après la formule du cours, les coordonnées de K sont :
   $x_K = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{3}{2}$ et $y_K = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$ donc $\boxed{K\left(\dfrac{3}{2}; 1\right)}$
4. On note $D(0;-1)$ un point de $[AB]$ et E le point de $[AC]$ tel que $(DE)//(BC)$.
   (a)
   (b) $AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{(0+2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = \boxed{2\sqrt{5}}$
   (c) ABC est un triangle, $D \in [AB]$, $E \in [AC]$ et $(DE)//(BC)$
   d'après le théorème de Thalès : $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$ donc $\dfrac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \dfrac{AE}{\sqrt{65}} = \dfrac{DE}{2\sqrt{5}}$
   donc $AE = \dfrac{2\sqrt{5} \times \sqrt{65}}{3\sqrt{5}} = \boxed{\dfrac{2\sqrt{65}}{3}}$
   et $DE = \dfrac{2\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \boxed{\dfrac{4\sqrt{5}}{3}}$
   (d) BAC est un triangle rectangle en B donc d'après les formules de trigonométrie :
   $Tan(\widehat{BAC}) = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{2}{3}$ donc $\boxed{\widehat{ABC} \approx 34^\circ}$
   (e) $\widehat{BCA} = \widehat{DEA} = 90 - 34 = 56^\circ$ donc $\boxed{\widehat{BCA} = \widehat{DEA} = 56^\circ}$

Exercice 2 : (2 pts)
Déterminer la proposition réciproque et la proposition contraposée des propositions ci-dessous.
Dire si la proposition, la réciproque et la contraposée sont vraies ou fausses.
Lorsqu'elles sont fausses, trouver un contre exemple pour justifier.

1. Proposition : Si $ab \geq 0$ alors $a \geq 0$ et $b \geq 0$ (Elle est fausse ex : $a = -3$ et $b = -1$)
   Contraposée : Si $a < 0$ ou $b < 0$ alors $ab < 0$ (Elle est fausse si par exemple $a < 0$ et $b = 0$)
   Réciproque : Si $a \geq 0$ et $b \geq 0$ alors $ab \geq 0$ (Elle est vraie)
2. Proposition : Si $a \geq 2$ alors $\dfrac{1}{a} \geq \dfrac{1}{2}$ (Elle est fausse Ex : $a = 4$)
   Contraposée : Si $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{2}$ alors $a < 2$ (Elle est fausse Ex : $a = 4$)
   Réciproque : Si $\dfrac{1}{a} \geq \dfrac{1}{2}$ alors $a \geq 2$ (Elle est fausse Ex : $a = 1$)

Exercice 3 : (8 pts)

1. $x_K = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$ et $y_K = \dfrac{y - A + y - C}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$ donc $\boxed{K(2;2)}$
2. D est un point tel que $ABCD$ soit un parallélogramme donc I est le milieu de $[BD]$
   On a donc $\dfrac{x_B + x_D}{2} = 2$ et $\dfrac{y_B + y_D}{2} = 2$
   Après résolution des deux équations on obtient : $D(1;-1)$
3. (a) $ABCD$ est un parallélogramme d'après la question précédente.
   $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(4)^2 + (4)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = \boxed{4\sqrt{2}}$
   $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(5-3)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \boxed{2\sqrt{2}}$
   $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(5+1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{40} = \boxed{2\sqrt{10}}$

ABC est un triangle
$AC^2 = (\sqrt{40})^2 = 40$
$AB^2 + BC^2 = (\sqrt{32})^2 + (\sqrt{8})^2 = 32 + 8 = 40$
donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$ et d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est rectangle en B.
Donc $ABCD$ est bien un rectangle de longueur $4\sqrt{2}$ et de largeur $2\sqrt{2}$.

(b) i. $D_f = [0; 2\sqrt{2}]$

ii. Pour tout $x \in [0; 2\sqrt{2}]$ on a :
$f(x) = Aire_{NMPDQR} = Aire_{ABCD} - Aire_{ANQR} - Aire_{NBM} - Aire_{MCP}$
$= 4\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} - x(2\sqrt{2} - x) - \dfrac{1}{2}x(4\sqrt{2} - x) - \dfrac{1}{2}(2\sqrt{2} - x)(4\sqrt{2} - x) = \boxed{x^2 - \sqrt{2}x + 8}$

iii. Pour tout $x \in [0; 2\sqrt{2}]$ on a :
$$\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{15}{2} = x^2 - \sqrt{2}x + \frac{2}{4} + \frac{15}{2} = x^2 - \sqrt{2}x + 8 = f(x)$$
donc pour tout $x \in [0; 2\sqrt{2}]$ on a : $f(x) = \left(x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \dfrac{15}{2}$

iv. $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{15}{2}$

v. Pour tout $x \in [0; 2\sqrt{2}]$ on a :
$$f(x) - f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

vi. $f(x) - f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ est le carré d'un nombre réel donc il est toujours positif quelque soit la valeur de x réel.

vii. Pour tout $x \in [0; 2\sqrt{2}]$ on a :
$f(x) - f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \geq 0$ donc $f(x) \geq f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$
Donc $\dfrac{15}{2}$ est le minimum de f.

viii. Le minimum de f est atteint pour $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.