**Partie A** ($6,5$ **points**) :

On note $f$ la fonction définie par $f : x \mapsto -2(x^2 - 2x - 1)$ et $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal.

1. $f(x)$ existe pour toutes les valeurs de $x$ réelles donc $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $4 - 2(1-x)^2 = 4 - 2(1 - 2x + x^2) = 4 - 2 + 4x - 2x^2 = -2x^2 + 4x + 4 = -2(x^2 - 2x - 1) = f(x)$
   donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f(x) = 4 - 2(1-x)^2}$
3. $f(0) = -2(x^2 - 2 \times 0 - 1) = -2 \times (-1) = 2$ donc $\boxed{f(0) = 2}$
   Les coordonnées du point d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe des ordonnées sont $(0; f(0))$ donc c'est le point $\boxed{A(0;2)}$
4. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - 2(1-x)^2 = 0 \Leftrightarrow 2(2 - (1-x)^2) = 0$
   $\Leftrightarrow 2\left[(\sqrt{2})^2 - (1-x)^2\right] = 0 \Leftrightarrow 2(\sqrt{2} - (1-x))(\sqrt{2} + (1-x)) = 0 \Leftrightarrow 2(\sqrt{2} - 1 + x)(\sqrt{2} + 1 - x) = 0$
   $\Leftrightarrow \sqrt{2} - 1 + x = 0$ ou $\sqrt{2} + 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{2}$ ou $x = 1 + \sqrt{2}$
   Les coordonnées des points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses sont de la forme $(\ldots; 0)$
   donc il y a deux points : $\boxed{B(1-\sqrt{2}; 0)}$ et $\boxed{(1+\sqrt{2}; 0)}$
5. Tableau des valeurs :

| $x$ | $-1$ | $-0,5$ | $0$ | $0,5$ | $1$ | $1,5$ | $2$ | $2,5$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-4$ | $-0,5$ | $2$ | $3,5$ | $4$ | $3,5$ | $2$ | $-0,5$ | $-4$ |

6. Voir au verso ...

**Partie B** ($5,5$ **points**) :

1. $f(1) = 4 - 2(1-1)^2 = 4$
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $f(x) - f(1) = 4 - 2(1-x)^2 - 4 = -2(1-x)^2$ donc $\boxed{f(x) - f(1) = -2(1-x)^2}$
2. $(1-x)^2$ est le carré d'un <u>nombre réel</u>, donc il est toujours positif ou nul.
   donc $f(x) - f(1)$ est toujours négatif ou nul.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $f(x) - f(1) \leq 0$ donc $\boxed{f(x) \leq f(1)}$
   Toutes les valeurs de $f(x)$ sont inférieures ou égales à celle de $f(1)$ donc $f(1)$ est la plus grande, donc $\boxed{f(1) = 4}$ est le maximum de $f$.
4. $f(1) = 4$ est le maximum de $f$ et il est atteint pour $\boxed{x = 1}$.
5. Tableau des signes de $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $1-\sqrt{2}$ | | $1+\sqrt{2}$ | | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

6. Tableau des variations de $f$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | |

**Partie C** ($5$ **points**) :

On note $g$ le fonction définie par $g : x \mapsto x + 1$ et $\mathcal{C}_g$ sa représentation graphique dans le même repère.

1. Il semble, d'après la représentation graphique sur la calculatrice, qu'il y ait deux points d'intersection.
2. D'après la calculatrice on obtient : $\boxed{D(-0.281; 0.719)}$ et $\boxed{E(1.781; 2.781)}$
3. $g(0) = 0 + 1 = 1$ et $g(2) = 2 + 1 = 3$ donc $\boxed{g(0) = 1}$ et $\boxed{g(2) = 3}$
4. Voir au verso ...
5. Par lecture graphqiue, l'ensemble des solutions est $\boxed{S = ]-0.281; 1.781[}$

**Partie D** ($3$ **points**) :

1. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow -2(x^2 - 2x - 1) = x + 1 \Leftrightarrow -2x^2 + 4x + 2 = x + 1 \Leftrightarrow 0 = 2x^2 - 3x - 1$
   donc $f(x) = g(x)$ est équivalente à $\boxed{2x^2 - 3x - 1 = 0}$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{17}{16}\right]$
   $= 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} - \frac{17}{16}\right) = 2x^2 - 3x - 1$
   Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\boxed{2x^2 - 3x - 1 = 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{17}{16}\right]}$

3. $2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{17}{16}\right]=0$

   $\Leftrightarrow 2\left[x-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4}\right]\left[x-\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{17}}{4}\right]=0 \Leftrightarrow x-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4}=0$ ou $x-\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{17}}{4}=0$

   $\Leftrightarrow x=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{17}}{4}$ ou $x=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4}$

   Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S=\left\{\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{17}}{4};\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4}\right\}}$

4. L'équation $f(x)=g(x)$ étant équivalente à $2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{17}{16}\right]=0$ alors elles ont les mêmes solutions, donc :

   L'ensemble des solutions est $\boxed{S=\left\{\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{17}}{4};\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4}\right\}}$

5. $g\left(\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{17}}{4}\right)=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{17}}{4}+1=\frac{7}{4}-\frac{\sqrt{17}}{4}$

   et

   $g\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4}\right)=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4}+1=\frac{7}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4}$

   donc les coordonnées des points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont :

   $\boxed{D\left(\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{17}}{4};\frac{7}{4}-\frac{\sqrt{17}}{4}\right)}$ et $\boxed{E\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4};\frac{7}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4}\right)}$

**Partie Bonus** :

Il faut résoudre l'équation $h(x)=k(x)$ :

$h(x)=k(x)\Leftrightarrow 4(x-1)^2-9=4x^2-25\Leftrightarrow (4(x-1)^2-9)-(4x^2-25)=0$

$\Leftrightarrow (2(x-1)-3)(2(x-1)+3)-(2x-5)(2x+5)=0\Leftrightarrow (2x-5)(2x+1)-(2x-5)(2x+5)=0$

$(2x-5)(2x+1-2x-5)=0\Leftrightarrow (2x-5)(-4)=0\Leftrightarrow 2x-5=0\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$

de plus

$k\left(\frac{5}{2}\right)=4\left(\frac{5}{2}\right)^2-25=25-25=0$

donc le point d'intersection entre $\mathcal{C}_h$ et $\mathcal{C}_k$ est $\boxed{F\left(\frac{5}{2};0\right)}$