

Exercice 1 : (8 pts)

On note $A = (2 - x)(x - 3) - (x - 3)(2x - 5)$ et $B = (2x - 4)^2 - 25$

$$1. A = (2 - x)(x - 3) - (x - 3)(2x - 5) = (2x - 6 - x^2 + 3x) - (2x^2 - 5x - 6x + 15) \\ = -x^2 + 5x - 6 - 2x^2 + 11x - 15 = -3x^2 + 16x - 21$$

$$\text{donc } A = -3x^2 + 16x - 21$$

$$B = (2x - 4)^2 - 25 = 4x^2 - 16x + 16 - 25 = 4x^2 - 16x - 9$$

$$\text{donc } B = 4x^2 - 16x - 9$$

$$2. A = (2 - x)(x - 3) - (x - 3)(2x - 5) = (x - 3)[(2 - x) - (2x - 5)] \\ = (x - 3)(2 - x - 2x + 5) = (x - 3)(7 - 3x)$$

$$\text{donc } A = (x - 3)(7 - 3x)$$

$$B = (2x - 4)^2 - 25 = (2x - 4)^2 - (5)^2 = (2x - 4 + 5)(2x - 4 - 5) = (2x + 1)(2x - 9)$$

$$\text{donc } B = (2x + 1)(2x - 9)$$

$$3. \text{ Si } x = -\sqrt{3} \text{ alors } B = 4(-\sqrt{3})^2 - 16(-\sqrt{3}) - 9 = 12 + 16\sqrt{3} - 9 = 3 + 16\sqrt{3}$$

$$4. \text{ Si } x = \frac{7}{3} \text{ alors } A = \left(\frac{7}{3} - 3\right) \left(7 - 3 \times \frac{7}{3}\right) = \left(\frac{7}{3} - 3\right) \times 0 = 0$$

$$5. A = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(7 - 3x) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \text{ ou } 7 - 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = \frac{7}{3} \text{ donc l'ensemble des solutions est } S = \left\{\frac{7}{3}; 3\right\}$$

$$6. A = -21 \Leftrightarrow -3x^2 + 16x - 21 = -21 \Leftrightarrow -3x^2 + 16x = 0 \Leftrightarrow x(-3x + 16) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } -3x + 16 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{16}{3} \text{ donc l'ensemble des solutions est } S = \left\{0; \frac{16}{3}\right\}$$

Exercice 2 : (8 pts)

Résoudre, dans l'ensemble \mathbb{R} des réels, les équations ci-dessous :

$$(E_1) : (x - 1)(x + 3) = x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 + 3x - x - 3 = x^2 - 1 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{donc l'ensemble des solutions est } S = \{1\}$$

$$(E_2) : 9(x + 1)^2 = 16 \Leftrightarrow 9(x + 1)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow [3(x + 1)]^2 - [4]^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow [3(x + 1) - 4][3(x + 1) + 4] = 0 \Leftrightarrow (3x + 3 - 4)(3x + 3 + 4) = 0 \Leftrightarrow (3x - 1)(3x + 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \text{ ou } 3x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ ou } x = -\frac{7}{3}$$

$$\text{donc l'ensemble des solutions est } S = \left\{-\frac{7}{3}; \frac{1}{3}\right\}$$

$$(E_3) : 1 - \frac{2x}{x + 1} = 1$$

$$\text{L'équation existe si et seulement si } x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \text{ donc } E = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$1 - \frac{2x}{x + 1} = 1 \Leftrightarrow \frac{x + 1}{x + 1} - \frac{2x}{x + 1} = 1 \Leftrightarrow \frac{1 - x}{x + 1} = 1 \Leftrightarrow 1 - x = x + 1 \Leftrightarrow 0 = 2x \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{or } 0 \in E \text{ donc l'ensemble des solutions est } S = \{0\}$$

$$(E_4) : x = \frac{2}{x}$$

$$\text{L'équation existe si et seulement si } x \neq 0 \text{ donc } E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$x = \frac{2}{x} \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}$$

$$\text{or } -\sqrt{2} \in E \text{ et } \sqrt{2} \in E \text{ donc l'ensemble des solutions est } S = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$$

Exercice 3 : (2 pts)

On note θ le nombre $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

$$\theta^2 = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{9 + 6\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{14 + 6\sqrt{5}}{4} = \frac{2(7 + 3\sqrt{5})}{2 \times 2} = \boxed{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}}$$

$$3\theta - 1 = 3 \times \frac{3 + \sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{9 + 3\sqrt{5}}{2} - \frac{2}{2} = \boxed{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}}$$

donc $\theta^2 = 3\theta - 1$

Exercice 4 : (2 pts)

Calculer le plus simplement possible : $A = 2009^2 - 2008 \times 2010$

On note $x = 2009$ alors $A = x^2 - (x - 1)(x + 1) = x^2 - (x^2 - 1) = x^2 - x^2 + 1 = 1$ donc $\boxed{A = 1}$

Exercice supplémentaire :

Résoudre l'équation : $x^2 - 3x - 4 = 0$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{9}{4} - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{25}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 - \left(\frac{5}{2} \right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2} + \frac{5}{2} \right) \left(x - \frac{3}{2} - \frac{5}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = 0 \text{ ou } x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 4$$

donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S = \{-1; 4\}}$