Devoir à la maison numéro 07 (2nde D et 2nde C) : **A rendre avant samedi** 19 **Décembre** 2010

Exercice :
On note (O, OI, OJ) un repère orthonormé.
On note $A\left(-1; \frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1; \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\right)$ et $D\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1; \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\right)$

1. Déterminer les coordonnées du point Z milieu de $[BD]$
2. Déterminer les coordonnées du point C sachant que $ABCD$ est un parallélogramme.
3. Démontrer que le triangle ABD est rectangle en A.
4. Que peut-on en déduire sur la nature du quadrilatère $ABCD$?
5. On note I le milieu de $[AB]$ et $\mathcal{C}$ le cercle de centre I et de rayon IC.
   (a) Calculer les coordonnées de I
   (b) Déterminer la distance IB.
   (c) Montrer que le rayon de $\mathcal{C}$ est de $\frac{\sqrt{5}}{2}$
   (d) Démontrer que $D \in \mathcal{C}$
6. On note P l'intersection entre $\mathcal{C}$ et $[IB)$
   (a) Déterminer la distance AP
   (b) Démontrer que $\frac{AP}{AB} = \frac{AB}{BP} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (Oh ! le nombre d'or)
7. On note ϕ le nombre d'or.
   (a) Calculer ϕ^{-1}
   (b) Démontrer que ϕ est une solution de l'équation : $x^2 = x + 1$
   (c) Démontrer que $x^2 = x + 1$ est équivalente à $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0$
   (d) Résoudre l'équation de la question 7) b).
   (e) Démontrer que ϕ est aussi solution des équations : $\phi^{-1} = \phi - 1$ et $\frac{\phi+1}{\phi-1} = \phi^3$
8. **Pour ceux qui souhaitent aller plus loin sur le nombre d'or**. (Partie non obligatoire)
   Nous allons montrer que ϕ ne peut pas être un nombre rationnel, qu'il ne peut pas se mettre sous la forme d'une fraction irréductible.
   (a) On suppose que ϕ s'écrive sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ avec p un entier naturel et q un entier naturelle non nul. p et q peuvent-ils être tous les deux pairs ?
   (b) A l'aide de l'égalité du 7) b) prouver que $p^2 = q^2 + pq$
   (c) En déduire que $p^2 - q^2 = pq$
   (d) Si p et q sont tous les deux impairs, de quelle parité sont : pq, p^2, q^2 et $p^2 - q^2$?
   (e) Etudier de même le cas ou p est pair et q impair, puis le cas où p est imapir et q pair.
   (f) Que peut-on en déduire sur la nature du nombre ϕ ?