**Exercice** :

**Partie A** Construction d'une fonction $V$ :

1. D'après le dessin de la boîte, $\boxed{x \in [0; 15]}$
2. $x = 10$ cm
   $y = 30 - 2 \times 10 = 10$ cm
   $z = \dfrac{30 - 2 \times 10}{10} = 5$ cm
   Le volume de la boîte est donc : $V = x \times y \times z = 10 \times 10 \times 5 = 500\ cm^3$.
   Donc $\boxed{V = 500\ cm^3}$
3. $\boxed{y = 30 - 2x}$ et $z = \dfrac{30 - 2x}{2} = 15 - x$ donc $\boxed{z = \dfrac{30 - 2x}{2}}$
4. Expression de $V(x)$ en fonction de $x$ :
   $V(x) = x \times y \times z = x(30 - 2x)(15 - x)$ donc $\boxed{V(x) = x(30 - 2x)(15 - x)}$
5. $D_V = [0; 15]$
6. Pour tout $x \in [0; 15]$, on a :
   $V(x) = x(30 - 2x)(15 - x) = x \times 2(15 - x)(15 - x) = 2x(15 - x)^2 = 2x(x - 15)^2$ donc $\boxed{V(x) = 2x(x - 15)^2}$
7. Le fabricant veut obtenir des boîtes à base carrée.

   **Cas** 1 **:** On peut avoir $x = z$
   $x = z \Leftrightarrow x = 15 - x \Leftrightarrow 2x = 15 \Leftrightarrow x = \dfrac{15}{2}$

   **Cas** 2 **:** On peut avoir $x = y$
   $x = y \Leftrightarrow x = 30 - 2x \Leftrightarrow 3x = 30 \Leftrightarrow x = 10$

   **Cas** 3 **:** On peut avoir $y = z$
   $y = z \Leftrightarrow 30 - 2x = 15 - x \Leftrightarrow x = 15$
   Les valeurs possibles pour obtenir une base carrée, sont donc $\boxed{x = 10}$ cm et $\boxed{x = 7,5}$ cm
   Le $x = 15$ est possible mais pas envisageable car la boîte serait plate.

**Partie B** Étude graphique de la fonction $V$ :

1. On peut lire graphiquement que les antécédents de 500 par $V$ sont environ $\boxed{1,3}$ et $\boxed{10}$.
2. Le maximum de $V$ sur $[0; 15]$ semble être $\boxed{1000\ cm^3}$.
3. Ce maximum est atteint pour la valeur $\boxed{5 \text{ cm}}$.
4. Tableau des variations de la fonction $V$

| x | 0 | | 5 | | 15 |
|---|---|---|---|---|---|
| V(x) | | | 1000 | | |
| | | ↗ | | ↘ | |
| | 0 | | | | 0 |

**Partie C** Étude algébrique de $V(x) = 500$ :

1. Pour tout $x \in [0; 15]$, on a :
   $V(x) = 500 \Leftrightarrow 2x(x - 15)^2 = 500 \Leftrightarrow 2x(x^2 - 30x + 225) = 500 \Leftrightarrow 2x^3 - 60x^2 + 450x = 500$
   $\Leftrightarrow 2x^3 - 60x^2 + 450x - 500 = 0$
   donc $\boxed{V(x) = 500 \text{ est équivalente à } 2x^3 - 60x^2 + 450x - 500 = 0}$
2. $(x - 10)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - 10ax^2 - 10bx - 10c = ax^3 + (b - 10a)x^2 + (c - 10b)x - 10c$
   par identification avec $2x^3 - 60x^2 + 450x - 500$ on obtient :
   $$\begin{cases} a = 2 \\ b - 10a = -60 \\ c - 10b = 450 \\ -10c = -500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -40 \\ c = 50 \end{cases}$$
   Donc $\boxed{2x^3 - 60x^2 + 450x - 500 = (x - 10)(2x^2 - 40x + 50)}$
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $2(x - 10 - 5\sqrt{3})(x - 10 + 5\sqrt{3}) = 2(x^2 - 10x + 5x\sqrt{3} - 10x + 100 - 50\sqrt{3} - 5x\sqrt{3} + 50\sqrt{3} - 75)$
   $= 2(x^2 - 20x + 25) = 2x^2 - 40x + 50$
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\boxed{2x^2 - 40x + 50 = 2(x - 10 - 5\sqrt{3})(x - 10 + 5\sqrt{3})}$

4. $V(x) = 500$
$\Leftrightarrow 2(x-10)(x-10-5\sqrt{3})(x-10+5\sqrt{3}) = 0$
$\Leftrightarrow x-10 = 0$ ou $x-10-5\sqrt{3} = 0$ ou $x-10+5\sqrt{3} = 0$
$\Leftrightarrow x = 10$ ou $x = 10+5\sqrt{3}$ ou $x = 10-5\sqrt{3}$
or $10+5\sqrt{3} > 15$ donc
Les solutions de cette équations sont donc : $\boxed{S = \{10-5\sqrt{3}; 10\}}$

**Partie D** Étude algébrique du maximum de $V$ :

1. $\boxed{V(x) - V(5) = 2x(x-15)^2 - 1000}$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$V(x) - V(5) = 2x(x^2 - 30x + 225) - 1000 = 2x^3 - 60x^2 + 450x - 1000$
et
$2(x-20)(x-5)^2 = (2x-40)(x^2-10x+25) = 2x^3 - 20x^2 + 50x - 40x^2 + 400x - 1000 = 2x^3 - 60x^2 + 450x - 1000$
donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien : $\boxed{V(x) - V(5) = 2(x-20)(x-5)^2}$
3. $(x-5)^2$ est le carré d'un nombre réel donc il est toujours positif.
4. On sait que $0 \leq x \leq 15$ donc $0 - 20 \leq x - 20 \leq 15 - 20$ donc $-20 \leq x - 20 \leq -5$
$(x-20)$ est donc toujours négatif pour $x \in [0; 20]$.
5. $V(x) - V(5) = 2(x-20)(x-5)^2$ donc d'après les deux questions précédentes, le résultat est toujours négatif donc pour tout $x \in [0; 15]$ on a $\boxed{V(x) - V(5) \leq 0}$
6. Pour tout $x \in [0; 15]$ on a donc $\boxed{V(x) \leq V(5)}$
7. $V(5) = 1000$ est donc le maximum de $V$ sur $[0; 15]$ et est atteint pour $x = 5$ cm.