

Les inéquations

(En seconde)

Dernière mise à jour : Samedi 17 Février 2007

Vincent OBATON, Enseignant au lycée Stendhal de Grenoble (Année 2006-2007)

J'aimais et j'aime
encore les mathéma-
tiques pour elles-mêmes
comme n'admettant
pas l'hypocrisie et le
vague, mes deux bêtes
d'aversion.

Stendhal

Table des matières

1	Quelques règles sur les inégalités	4
1.1	Règle de l'addition et soustraction	4
1.2	Règles de la multiplication et division	4
2	Les inéquations du premier degré à une inconnue	5
2.1	Méthode de résolution	5
2.2	Exemples	5
3	Signe d'un binôme	6
3.1	Définition d'un binôme	6
3.2	Activités de découverte	6
3.3	Tableau de signe d'un binôme	6
4	Signe d'un produit de binômes	7
4.1	Définition	7
4.2	Tableau de signe	7
4.3	Exercices	8
5	Signe d'une expression rationnelle factorisée	8
5.1	Définition	8
5.2	Tableau de signe	8
5.3	Exercices	9
6	Les inéquations du second degré à une inconnue	9
6.1	Méthode de résolution	9
6.2	Exemples	9
7	Les inéquations avec expressions rationnelles	10
7.1	Méthode de résolution	10
7.2	Exemples	11
8	Applications	12
8.1	Ensembles de définition	12
8.2	Inéquations et fonctions	12
8.3	Validité d'une expression dans un problème	12
8.4	Position relative entre deux courbes	12

1 Quelques règles sur les inégalités

1.1 Règle de l'addition et soustraction

Règle 1 :

Soient a, b et c trois réels

alors $a \leq b \iff a + c \leq b + c$

et $a \leq b \iff a - c \leq b - c$

Exemples :

- $2x + 4 \leq 0 \iff 2x + 4 - 4 \leq 0 - 4 \iff 2x \leq -4$
- $3x - 2 < -3 \iff 3x - 2 + 2 < -3 + 2 \iff 3x < -1$
- $\frac{1}{2}(2x - 4\sqrt{2}) > 0 \iff x - 2\sqrt{2} > 0 \iff x - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} > 0 + 2\sqrt{2} \iff x > 2\sqrt{2}$

1.2 Règles de la multiplication et division

Règle 2 :

Soient a, b deux réels et c **un réel positif** ou nul

alors $a \leq b \iff a \times c \leq b \times c$

et $a \leq b$ et $c \neq 0 \iff \frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$

Exemples :

- $2x > 7 \iff 2x \times 3 > 7 \times 3 \iff 6x > 21$
- $3x \leq 4 \iff \frac{3x}{3} \leq \frac{4}{3} \iff x \leq \frac{4}{3}$
- $\sqrt{2}x \geq 3 \iff \sqrt{2}x \times \sqrt{2} \geq 3 \times \sqrt{2} \iff 2x \geq 3\sqrt{2}$

Règle 3 :

Soient a, b deux réels et c **un réel négatif** ou nul

alors $a \leq b \iff a \times c \geq b \times c$ (Changement de sens de l'inégalité)

et $a \leq b$ et $c \neq 0 \iff \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$ (Changement de sens de l'inégalité)

Exemples :

- $-x > 4 \iff -x \times (-1) < 4 \times (-1) \iff x < -4$
- $-4x < -3 \iff \frac{-4x}{-4} > \frac{-3}{-4} \iff x > \frac{3}{4}$
- $-2x \geq 6 \iff \frac{-2x}{-2} \leq \frac{6}{-2} \iff x \leq -3$

2 Les inéquations du premier degré à une inconnue

2.1 Méthode de résolution

Méthode de résolution :

- Développer et réduire les deux membres.
- Faire apparaître les x d'un côté et le reste de l'autre.
- Trouver une équation équivalente de la forme $x \leq a$ ou $x \geq a$ ou $x < a$ ou $x > a$.
- Donner l'ensemble des solutions sous la forme d'un intervalle.

2.2 Exemples

Exemple 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $6x + 3 > -4x - 5$

$$\begin{aligned}
 6x + 3 &> -4x - 5 \\
 \Leftrightarrow 6x + 4x &> -5 - 3 \\
 \Leftrightarrow 10x &> -8 \\
 \Leftrightarrow x &> -\frac{8}{10} \\
 \Leftrightarrow x &> -\frac{4}{5} \text{ ou } x > -0,8 \\
 \text{donc } S &= \left] -\frac{4}{5}; +\infty \right[
 \end{aligned}$$

Exemple 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $-3(x + 5) - (2x + 3) \leq 4(x - 1) - 3(2 + x)$

$$\begin{aligned}
 -3(x + 5) - (2x + 3) &\leq 4(x - 1) - 3(2 + x) \\
 \Leftrightarrow -3x - 15 - 2x - 3 &\leq 4x - 4 - 6 - 3x \\
 \Leftrightarrow -5x - 18 &\leq x - 10 \\
 \Leftrightarrow -5x - x &\leq -10 + 18 \\
 \Leftrightarrow -6x &\leq 8 \\
 \Leftrightarrow x &\geq -\frac{8}{6} \\
 \Leftrightarrow x &\geq -\frac{4}{3} \\
 \text{donc } S &= \left[-\frac{4}{3}; +\infty \right[
 \end{aligned}$$

Exemple 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(2x + 3)(x - 1) \geq (3 + x)(5 + 2x)$

$$\begin{aligned}
 (2x + 3)(x - 1) &\geq (3 + x)(5 + 2x) \\
 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 3x - 3 &\geq 15 + 6x + 5x + 2x^2 \\
 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 &\geq 2x^2 + 11x + 15 \\
 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x^2 + x - 11x &\geq 15 + 3 \\
 \Leftrightarrow -10x &\geq 18 \\
 \Leftrightarrow x &\leq -\frac{18}{10} \\
 \Leftrightarrow x &\leq -\frac{9}{5} \text{ ou } x \leq -1,8 \\
 \text{donc } S &= \left] -\infty; -\frac{9}{5} \right]
 \end{aligned}$$

Exemple 4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\frac{x}{2} - \frac{5}{3} < 4 - \frac{x}{3}$

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{2} - \frac{5}{3} < 4 - \frac{x}{3} &\Leftrightarrow \frac{3x}{6} - \frac{10}{6} < \frac{24}{6} - \frac{2x}{6} \\
 \Leftrightarrow 3x - 10 &< 24 - 2x \\
 \Leftrightarrow 3x + 2x &< 24 + 10 \Leftrightarrow 5x < 34 \Leftrightarrow x < \frac{34}{5} \\
 \text{donc } S &= \left] -\infty; \frac{34}{5} \right[
 \end{aligned}$$

3 Signe d'un binôme

3.1 Définition d'un binôme

Définition :

Un binôme est une expression littérale de la forme $ax + b$ avec $a \neq 0$

Exemples :

- $2x + 3$
- $2x - 3$
- $3 - 2x$
- $-x$

3.2 Activités de découverte

Activité :

- Résoudre $2x + 3 = 0$ puis $2x + 3 < 0$ puis $2x + 3 > 0$ et dresser un tableau de signe de $2x + 3$
- Résoudre $2x - 3 = 0$ puis $2x - 3 < 0$ puis $2x - 3 > 0$ et dresser un tableau de signe de $2x - 3$
- Résoudre $-2x + 3 = 0$ puis $-2x + 3 < 0$ puis $-2x + 3 > 0$ et dresser un tableau de signe de $-2x + 3$
- Résoudre $-2x - 3 = 0$ puis $-2x - 3 < 0$ puis $-2x - 3 > 0$ et dresser un tableau de signe de $-2x - 3$

Correction :

x	$-\infty$	$-3/2$	$+\infty$
$2x + 3$		$-$	$+$
x	$-\infty$	$3/2$	$+\infty$
$2x - 3$		$-$	$+$
x	$-\infty$	$3/2$	$+\infty$
$-2x + 3$		$+$	$-$
x	$-\infty$	$-3/2$	$+\infty$
$-2x - 3$		$+$	$-$

3.3 Tableau de signe d'un binôme

De l'activité précédente, on peut conclure que le signe du binôme $ax + b$ est donné par le signe du nombre a qui est devant le x . Pour généraliser on peut dresser le tableau de signe qui fonctionne pour tous les binômes.

x	$-\infty$	$-b/a$	$+\infty$
$ax + b$		$-$	$+$

4 Signe d'un produit de binômes

4.1 Définition

Un produit de binômes est une expression littérale de la forme :

$$(a_1x + b_1)(a_2x + b_2)(a_3x + b_3) \dots (a_nx + b_n)$$

avec $a_1, a_2 \dots a_n$ non nuls

Comme on sait trouver le signe de chacun des binômes, alors grâce à la règle des signes dans une multiplication, on peut trouver le signe du produit de plusieurs binômes. Pour cela, on va utiliser un tableau de signe qui nous permettra de trouver le signe plus rapidement.

4.2 Tableau de signe

Voici un exemple pour expliquer la méthode permettant de dresser un tableau de signe d'un produit de binômes :

Dressons le tableau des signes de :

$$A(x) = -x(2x - 3)(x + 6)(4 - 2x)$$

- Cherchons les valeurs de x qui annulent chacun des binômes de $A(x)$:

$$\Rightarrow -x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3/2$$

$$\Rightarrow x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -6$$

$$\Rightarrow 4 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

- Dressons maintenant le tableau des signes de $A(x)$:

x	$-\infty$	-6	0	$3/2$	2	$+\infty$	
$-x$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$2x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$x+6$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	
$4-2x$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$A(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

Conclusion :

$$\Rightarrow A(x) > 0 \text{ si } x \in]-\infty; -6[\cup]0; \frac{3}{2}[\cup]2; +\infty[$$

$$\Rightarrow A(x) < 0 \text{ si } x \in]-6; 0[\cup]\frac{3}{2}; 2[$$

$$\Rightarrow A(x) = 0 \text{ si } x \in \left\{ -6, 0, \frac{3}{2}, 2 \right\}$$

4.3 Exercices

5 Signe d'une expression rationnelle factorisée

5.1 Définition

Une expression rationnelle factorisée est une expression littérale de la forme :

$$\frac{(a_1x + b_1)(a_2x + b_2)(a_3x + b_3) \dots (a_nx + b_n)}{(a'_1x + b'_1)(a'_2x + b'_2)(a'_3x + b'_3) \dots (a'_nx + b'_n)}$$

avec $a_1, a_2 \dots a_n$ et $a'_1, a'_2 \dots a'_n$ non nuls

Attention dans ce genre d'expression il y a des valeurs interdites.

5.2 Tableau de signe

Toujours à l'aide des tableaux de signe des binômes et des règles des signes pour la multiplication et la division, on peut trouver le signe d'une expression rationnelle factorisée. Voici un exemple pour expliquer la méthode permettant de dresser un tableau de signe d'une expression rationnelle factorisée :

Dressons le tableau des signes de :

$$B(x) = \frac{2x(3x - 6)}{(x - 3)(1 - x)}$$

- Cherchons les valeurs de x qui annulent chacun des binômes de $B(x)$:

$$\Rightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow 3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\Rightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

$$\Rightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

- Dressons maintenant le tableau des signes de $B(x)$:

x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$
$2x$		−	0	+		+
$3x - 6$		−		−	0	+
$x - 3$		−		−		0
$1 - x$		+		+	0	−
$B(x)$		−	0	+	0	−

Conclusion :

$$\Rightarrow B(x) > 0 \text{ si } x \in]0; 1[\cup]2; 3[$$

$$\Rightarrow B(x) < 0 \text{ si } x \in]-\infty; 0[\cup]1; 2[\cup]3; +\infty[$$

$$\Rightarrow B(x) = 0 \text{ si } x \in \{0; 1; 2; 3\}$$

5.3 Exercices

6 Les inéquations du second degré à une inconnue

6.1 Méthode de résolution

Méthode de résolution :

- Tout faire apparaître dans le même membre.
 - Factoriser le membre non nul.
 - Dresser son tableau de signe.
 - Donner l'ensemble des solutions.

6.2 Exemples

Exemple 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(x - 2)(3x - 4) \leq (x - 2)(2x + 6)$

$$\begin{aligned} (x - 2)(3x - 4) &\leq (x - 2)(2x + 6) \\ \Leftrightarrow (x - 2)(3x - 4) - (x - 2)(2x + 6) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (x - 2)[(3x - 4) - (2x + 6)] &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (x - 2)(3x - 4 - 2x - 6) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (x - 2)(x - 10) &\leq 0 \end{aligned}$$

Cherchons les valeurs qui annulent les binômes :

$$\Rightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\Rightarrow x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 10$$

Dressons le tableau des signes de $A(x) = (x - 2)(x - 10)$

x	$-\infty$		2		10		$+\infty$
$x - 2$		-	0	+		+	
$x - 10$		-		-	0	+	
$A(x)$		+	0	-	0	+	

Ensemble des solutions :

$$S = [2; 10]$$

Exemple 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $4(x - 2)^2 > 9$

$$\begin{aligned} 4(x - 2)^2 &> 9 \\ \Leftrightarrow 4(x - 2)^2 - 9 &> 0 \\ \Leftrightarrow [2(x - 2) + 3][2(x - 2) - 3] &> 0 \\ \Leftrightarrow (2x - 4 + 3)(2x - 4 - 3) &> 0 \\ \Leftrightarrow (2x - 1)(2x - 7) &> 0 \end{aligned}$$

Cherchons les valeurs qui annulent les binômes :

$$\Rightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$$

$$\Rightarrow 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = 7/2$$

Dressons le tableau des signes de $B(x) = (2x - 1)(2x - 7)$

x	$-\infty$	$1/2$	$7/2$	$+\infty$
$2x - 1$	$-$	0	$+$	$+$
$2x - 7$	$-$	$-$	0	$+$
$B(x)$	$+$	0	$-$	$+$

Ensemble des solutions :

$$S = \left] -\infty; \frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{7}{2}; +\infty \right[$$

Exemple 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(x+3)^2 < (2x+1)^2$

$$(x+3)^2 < (2x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 - (2x+1)^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow [(x+3) + (2x+1)][(x+3) - (2x+1)] < 0$$

$$\Leftrightarrow (3x+4)(-x+2) < 0$$

Cherchons les valeurs qui annulent les binômes :

$$\Rightarrow 3x+4=0 \Leftrightarrow x=-4/3$$

$$\Rightarrow -x+2=0 \Leftrightarrow x=2$$

Dressons le tableau des signes de $C(x) = (3x+4)(-x+2)$

x	$-\infty$	$-4/3$	2	$+\infty$
$3x+4$	$-$	0	$+$	$+$
$-x+2$	$+$	$+$	0	$-$
$C(x)$	$-$	0	$+$	$-$

Ensemble des solutions :

$$S = \left] -\infty; -\frac{4}{3} \right[\cup] 2; +\infty [$$

7 Les inéquations avec expressions rationnelles

7.1 Méthode de résolution

Méthode de résolution :

- Trouver l'ensemble d'étude de l'inéquation.
- Tout faire apparaître dans le même membre.
- Mettre au même dénominateur le membre non nul.
 - Factoriser le numérateur.
- Dresser le tableau de signe de l'expression rationnelle factorisée.
 - Donner l'ensemble des solutions.

7.2 Exemples

Exemple 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\frac{2x+3}{x-1} \leq 4$ Ensemble d'étude :

L'expression $\frac{2x+3}{x-1}$ existe si et seulement si $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ donc $E = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Transformation de l'inéquation :

$$\frac{2x+3}{x-1} \leq 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+3}{x-1} - 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+3}{x-1} - \frac{4(x-1)}{x-1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+3-4x+4}{x-1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x+7}{x-1} \leq 0$$

Cherchons les valeurs qui annulent les binômes :

$$\Rightarrow -2x+7=0 \Leftrightarrow x=7/2$$

$$\Rightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

Dressons le tableau des signes de $A(x) = \frac{-2x+7}{x-1}$

x	$-\infty$		1		7/2		$+\infty$
$-2x+7$		+		+	0		-
$x-1$		-	0		+		-
$A(x)$		-		+	0		-

Ensemble des solutions :

$$S =]-\infty; 1[\cup \left] \frac{7}{2}; +\infty \right[$$

Exemple 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\frac{9}{(x+1)^2} > 1$

Ensemble d'étude :

L'expression $\frac{9}{(x+1)^2}$ existe si et seulement si $(x+1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ donc $E = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Transformation de l'inéquation :

$$\frac{9}{(x+1)^2} > 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{(x+1)^2} - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{(x+1)^2} - \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9 - (x+1)^2}{(x+1)^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3+x+1)(3-x-1)}{(x+1)^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+4)(-x+2)}{(x+1)^2} > 0$$

Cherchons les valeurs qui annulent les binômes :

$$\Rightarrow x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$$

$$\Rightarrow -x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\Rightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Dressons le tableau des signes de $B(x) = \frac{(x+4)(-x+2)}{(x+1)^2}$

x	$-\infty$	-4	-1	2	$+\infty$	
$x + 4$		$-$	0	$+$	$+$	
$2 - x$		$+$	$+$	0	$-$	
$(x + 1)^2$		$+$	$+$	0	$+$	
$B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Ensemble des solutions :

$$S =]-4; -1[\cup]-1; 2[$$

8 Applications

8.1 Ensembles de définition

8.2 Inéquations et fonctions

8.3 Validité d'une expression dans un problème

8.4 Position relative entre deux courbes