✎ Module 06 ✐

Citation du jour : (Saint Grégoire de Nysse).
Chercher n'est pas une chose et trouver une autre, mais le gain de la recherche, c'est la recherche même.

Exercice 1 :

1. Calculer :
   (a) $S_1 = \dfrac{1}{1 \times 2}$
   (b) $S_2 = \dfrac{1}{1 \times 2} + \dfrac{1}{2 \times 3}$
   (c) $S_3 = \dfrac{1}{1 \times 2} + \dfrac{1}{2 \times 3} + \dfrac{1}{3 \times 4}$
   (d) $S_4 = \dfrac{1}{1 \times 2} + \dfrac{1}{2 \times 3} + \dfrac{1}{3 \times 4} + \dfrac{1}{4 \times 5}$
2. Pour tout n entier naturel non nul, écrire $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ sous la forme d'une fraction irréductible.
3. En utilisant la question 2., trouver rapidement et avec une seule opération, le résultat de :
$$S_6 = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7}$$
4. En déduire une méthode pour calculer :
$$S_{999} = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots\cdots + \frac{1}{998 \times 999} + \frac{1}{999 \times 1000}$$

Exercice 2 :

1. Calculer :
   (a) $S_1 = (2-1)(2+1)$
   (b) $S_2 = (2-1)(2+1) + (3-1)(3+1)$
   (c) $S_3 = (2-1)(2+1) + (3-1)(3+1) + (4-1)(4+1)$
   (d) $S_4 = (2-1)(2+1) + (3-1)(3+1) + (4-1)(4+1) + (5-1)(5+1)$
2. On note :
$$P(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x + 3$$
   et
$$P(x+1) = \frac{1}{3}(x+1)^3 - \frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{5}{6}(x+1) + 3$$
   Vérifiez que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
$$(x-1)(x+1) = P(x+1) - P(x)$$
3. En utilisant la question 2., trouver rapidement et avec une seule opération, le résultat de :
$$S_6 = (2-1)(2+1) + (3-1)(3+1) + (4-1)(4+1) + (5-1)(5+1) + (6-1)(6+1) + (7-1)(7+1)$$
   et de
$$S_7 = 1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + 4 \times 6 + 5 \times 7 + 6 \times 8 + 7 \times 9$$
4. En déduire une méthode pour calculer :
$$S_{98} = 1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + 4 \times 6 + \cdots\cdots + 98 \times 100$$