

**Module 2 ( Les nombres premiers )****Exercice 1 :**

On note  $p$  un nombre premier plus grand ou égal à 3.

1. Explique pourquoi  $a = \frac{p+1}{2}$  et  $a = \frac{p-1}{2}$  sont des nombres entiers.
2. Explique pourquoi  $\frac{p^2-1}{2}$  est un nombre entier.

**Exercice 2 :**

Nombres premiers d'Euler ( Mathématicien Suisse 1707-1783 ) :

On montre que, pour tous les entiers  $n$  allant de  $-40$  à  $40$ ,  $n^2 - n + 41$  est un nombre premier.

1. Vérifier cette formule pour tous les entiers  $n$  de 0 à 20.
2. Montrer que pour  $n = 41$ , le nombre  $n^2 - n + 41$  n'est pas premier.

**Exercice 3 :**

Nombres premiers de Mersenne ( Savant Français 1588-1648 ) :

Mersenne nous dit que :

Si  $n$  est un nombre premier, alors  $2^n - 1$  l'est aussi.

1. Vérifier que cette formule donne des nombres premiers, en prenant pour  $n$  les premiers nombres premiers.
2. Quelle est la première valeur de  $n$  qui ne donne pas un nombre premier par cette formule ?

**Exercice 4 :**

Nombres premiers de Fermat ( Mathématicien Français 1601-1665 ) :

Fermat nous dit que :

Si  $n$  est un nombre entier naturel, alors  $2^{2^n} + 1$  est un nombre premier.

1. Calculer les nombres obtenus avec  $n$  entier allant de 0 à 3.
2. En revanche, montrer que la valeur  $n = 5$  donne un nombre divisible par 641.