

**Exercice 1 :**

$$1. IB = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2}$$

Le triangle  $BCI$  est rectangle en  $B$  donc on peut utiliser le théorème de Pythagore :

$$IC = \sqrt{IB^2 + BC^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$AP = AI + IP = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$$

$$2. \frac{AP}{AB} = \frac{\phi}{1} = \phi$$

$$BP = AP - AB = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$\frac{AB}{AP} = \frac{1}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{5} - 1)}{5 - 1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \phi$$

$$\text{donc } \frac{AB}{AP} = \frac{AP}{AB} = \phi.$$

$$3. \phi \approx 1,618034.$$

$$4. \phi^2 = \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)^2 = \frac{5 + 2\sqrt{5} + 1}{4} = \frac{2\sqrt{5} + 6}{4} = \frac{2(\sqrt{5} + 3)}{4} = \frac{\sqrt{5} + 3}{2}$$

$$\phi + 1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} + 1 = \frac{\sqrt{5} + 1 + 2}{2} = \frac{\sqrt{5} + 3}{2}$$

$$\text{donc } \phi^2 = \phi + 1.$$

$$5. \phi^{-1} = \frac{1}{\phi} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5} + 1} = \frac{2(\sqrt{5} - 1)}{5 - 1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$\phi - 1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5} + 1 - 2}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$\text{Donc } \phi^{-1} = \phi - 1$$

$$6. \text{ On sait d'après la question 4 que } \phi^2 = \phi + 1$$

$$\text{donc } \phi^3 = \phi(\phi + 1) = \phi^2 + \phi \text{ or } \phi^2 = \phi + 1$$

$$\text{donc } \phi^3 = \phi + 1 + \phi = 2\phi + 1 \text{ donc } \phi^3 = 2\phi + 1$$

$$\text{On sait d'après la question 5 que } \phi^{-1} = \phi - 1$$

$$\text{donc } \phi^{-2} = \phi^{-1}(\phi - 1) = 1 - \phi^1 \text{ or } \phi^{-1} = \phi - 1$$

$$\text{donc } \phi^{-2} = 1 - (\phi - 1) = 1 - \phi + 1 = 2 - \phi \text{ donc } \phi^3 = -\phi + 2$$

$$7. \text{ Même méthode qu'à la question précédente :}$$

$$\triangleright \phi^4 = \phi \times \phi^3 = \phi(2\phi + 1) = 2\phi^2 + \phi = 2(\phi + 1) + \phi = 3\phi + 2$$

$$\triangleright \phi^5 = \phi \times \phi^4 = \phi(3\phi + 2) = 3\phi^2 + 2\phi = 3(\phi + 1) + 2\phi = 5\phi + 3$$

$$\triangleright \phi^6 = \phi \times \phi^5 = \phi(5\phi + 3) = 5\phi^2 + 3\phi = 5(\phi + 1) + 3\phi = 8\phi + 5$$

$$8. \text{ Même méthode qu'à la question précédente :}$$

$$\triangleright \phi^{-3} = \phi^{-1} \times \phi^{-2} = \phi^{-1}(2 - \phi) = 2\phi^{-1} - 1 = 2(\phi - 1) - 1 = 2\phi - 3$$

$$\triangleright \phi^{-4} = \phi^{-1} \times \phi^{-3} = \phi^{-1}(2\phi - 3) = 2 - 3\phi^{-1} = 2 - 3(\phi - 1) = 5 - 3\phi$$