

Chapitre 3

Les expressions littérales

- 1. Définitions et rappels*
- 2. Développement*
- 3. Factorisation*
- 4. Comment démontrer une égalité ?*
- 5. Résolution des équations*

J'aimais et j'aime
encore les mathéma-
tiques pour elles-mêmes
comme n'admettant
pas l'hypocrisie et le
vague, mes deux bêtes
d'aversion.

Stendhal

1 Définition et rappels

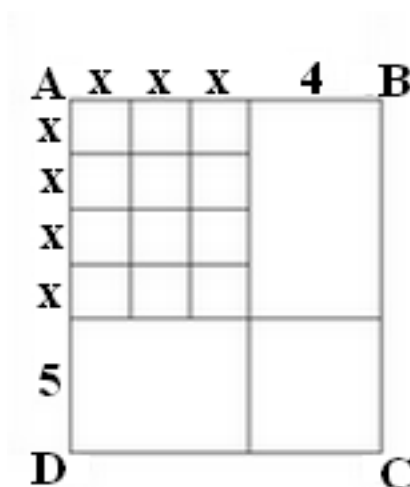
1.1 Définition

Une expression littérale est une suite d'opérations comportant une ou plusieurs variables que l'on note par des lettres.

Exemples :

1. $A = 4x + 5$
2. $B = (3x - 5)(6x + 4)$
3. $C = 4x^y + 3xy^2 - 5$
4. $D = \frac{6x - 2}{4x + 3}$

Activité 1 :



1. Calculer l'aire de ABC de deux façons différentes.
2. Que peut-on alors dire de $(3x + 4)(4x + 5)$ et de $12x^2 + 31x + 20$?
3. Comment se nomme la transformation qui passe de $(3x + 4)(4x + 5)$ à $12x^2 + 31x + 20$?
4. Comment se nomme la transformation qui passe de $12x^2 + 31x + 20$ à $(3x + 4)(4x + 5)$?
5. Comment peut-on démontrer, par le calcul, que $(3x + 4)(4x + 5) = 12x^2 + 31x + 20$?
6. Comment peut-on trouver x rapidement, pour que l'aire de ABC soit égale à 20 ?

Dans la suite du cours, nous allons justement apprendre à :

- Passer d'une expression factorisée à une expression développée.
- Passer d'une expression développée à une expression factorisée.
- Démontrer des égalités, par le calcul.
- Résoudre des équations.
- Résoudre des problèmes.

1.2 Ensemble d'étude

Pour beaucoup d'expressions littérales, la ou les variables peuvent représenter n'importe quel nombre de l'ensemble des réels $\mathbb{R}$. Mais il arrive parfois que certains nombres soient exclus car lorsqu'on remplace la variable par ces nombres, il est impossible de faire le calcul.

Exemple 1: $A = \frac{2x+5}{x-5}$

Calculons A pour $x = 5$: $A = \frac{2 \times 5 + 5}{5 - 5} = \frac{15}{0}$ Or on ne peut pas diviser par 0 donc A n'existe pas pour $x = 5$.

On dira dans ce cas que 5 est une valeur interdite pour A .

Dans ce cas on étudie A sur l'ensemble : $E_A = \mathbb{R} \setminus \{5\} =]-\infty; 5[\cup]5; +\infty[$

Exemple 2: $B = \frac{2x+5}{x^2-4}$

Calculons B pour $x = 2$ puis pour $x = -2$.

$B = \frac{2 \times 2 + 5}{2^2 - 4} = \frac{9}{4 - 4} = \frac{9}{0}$ Or on ne peut pas diviser par 0 donc B n'existe pas pour $x = 2$.

$B = \frac{2 \times (-2) + 5}{(-2)^2 - 4} = \frac{91}{4 - 4} = \frac{91}{0}$ Or on ne peut pas diviser par 0 donc B n'existe pas pour $x = -2$.

Il y a donc deux valeurs interdites : -2 et 2 . Donc l'ensemble d'étude est

$E_B = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\} =]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$

Exemple 3 : $C = \sqrt{x+2}$

Calculons C pour un nombre plus petit que -2 . Ex $x = -3$

$C = \sqrt{-3+2} = \sqrt{-1}$ Or on ne peut pas calculer la racine carrée d'un nombre négatif. Il faut donc regarder pour quelles valeurs de x : $x+2 < 0$

Or $x+2 < 0$ si $x < -2$ donc tous les nombres plus petit que -2 sont des valeurs interdites. Donc l'ensemble d'étude est constituée de tous les nombres plus grand ou égal à -2 . Donc $E_C = [-2; +\infty[$

Exemple 4: $D = 4xy^2 + 3x^2y - 5$

Il n'y a aucun problème pour calculer cette expression. Il n'y a pas de quotient et pas de racine carrée. il n'y a donc aucune valeur interdite.

L'ensemble d'étude est donc : $E_D = \mathbb{R}$.

2 Développement

2.1 Définition

Définition

Développer c'est transformer une multiplication en addition (ou soustraction).

Pour développer une expression littérales il faut utiliser la règle de la distributivité ou les identités remarquables :

Règle de la distributivité :

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

Identités remarquables :

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Exemple 1:

$$A = (2x + 5)(3x - 4) + (4x - 5)^2$$

L'ensemble d'étude est évidemment $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} A &= [6x^2 - 8x + 15x - 20] + [(4x)^2 - 2(4x)(5) + 5^2] \\ &= 6x^2 + 7x - 20 + 16x^2 - 40x + 25 \\ &= 22x^2 - 33x + 5 \end{aligned}$$

Exemple 2:

$$B = \left(2x + \frac{1}{2}\right)^2$$

L'ensemble d'étude est évidemment $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} B &= (2x)^2 + 2(2x)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= 4x^2 + \frac{4}{2}x + \frac{1}{4} \\ &= 4x^2 + 2x + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Exemple 3:

$$C = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3}$$

L'ensemble d'étude est $\mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$

$$\begin{aligned} C &= \frac{1 \times (x-3)}{(x+2)(x-3)} + \frac{1 \times (x+2)}{(x+2)(x-3)} \\ &= \frac{x-3}{x-3} + \frac{x+2}{x-3} \\ &= \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x + 2x - 6} \\ &= \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - x - 6} \end{aligned}$$

Fiche d'exercices  FicheExerciceExpLitterales01.pdf 

3 Factorisation

Définition

Factoriser c'est transformer une addition (ou soustraction) en multiplication.

Pour factoriser une expression littérales il faut utiliser la règle de la distributivité ou les identités remarquables mais dans le sens inverse:

Règle de la distributivité :

$$\underline{a} \times b + \underline{a} \times c = \underline{a} \times (b + c)$$

On dira alors que a est le facteur commun.

Identités remarquables :

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &= (a + b)^2 \\ a^2 - 2ab + b^2 &= (a - b)^2 \\ a^2 - b^2 &= (a + b)(a - b) \end{aligned}$$

Exemple 1: (Avec facteur commun)

$$A = 4x^2y - 10x^2 + 6xy^2$$

L'ensemble d'étude est évidemment $\mathbb{R}$

Il y a $2x$ en facteur commun.

$$A = \underline{2x} \times 2xy - \underline{2x} \times 5x + \underline{2x} \times 3y^2$$

$$= \underline{2x}(2xy - 5x + 3y^2)$$

Exemple 2: (Avec facteur commun)

$$B = (x - 3)(2x + 4) - (x - 3)(6 - 5x)$$

L'ensemble d'étude est évidemment $\mathbb{R}$

Il y a $(x - 3)$ comme facteur commun.

$$\begin{aligned} B &= \underline{(x - 3)} \times (2x + 4) - \underline{(x - 3)} \times (6 - 5x) \\ &= \underline{(x - 3)}[(2x + 4) - (6 - 5x)] \\ &= \underline{(x - 3)}[2x + 4 - 6 + 5x] \\ &= (x - 3)(7x - 2) \end{aligned}$$

Exemple 3: (Avec facteur commun)

$$C = (x - 3)(2x + 4) - (x - 3)$$

L'ensemble d'étude est évidemment $\mathbb{R}$

Il y a $(x - 3)$ comme facteur commun.

$$\begin{aligned} C &= \underline{(x - 3)} \times (2x + 4) - \underline{(x - 3)} \times 1 \\ &= \underline{(x - 3)}[(2x + 4) - 1] \\ &= \underline{(x - 3)}[2x + 4 - 1] \\ &= (x - 3)(2x + 3) \end{aligned}$$

Exemple 4: (Avec facteur commun)

$$D = (x - 3)(2x + 4) - (6 - 2x)(x - 5)$$

L'ensemble d'étude est évidemment $\mathbb{R}$

On remarque que $6 - 2x = 2(3 - x) = -2(x - 3)$
donc $(x - 3)$ est un facteur commun.

$$\begin{aligned} D &= (x - 3)(2x + 4) - (-2)(x - 3)(x - 5) \\ &= (x - 3)(2x + 4) + 2(x - 3)(x - 5) \\ &= \underline{(x - 3)} \times (2x + 4) + \underline{2(x - 3)} \times (x - 5) \\ &= \underline{(x - 3)}[(2x + 4) + 2(x - 5)] \\ &= \underline{(x - 3)}[2x + 4 + 2x - 10] \\ &= (x - 3)(4x - 6) \end{aligned}$$

On peut encore factoriser la deuxième parenthèse par 2

$$D = 2(x - 3)(2x - 3)$$

Exemple 5: (Sans facteur commun)

$$E = 4x^2 + 20x + 25$$

L'ensemble d'étude est évidemment $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} E &= (2x)^2 + 2(2x)(5) + (5)^2 \\ &= (2x + 5)^2 \end{aligned}$$

Exemple 6: (Sans facteur commun)

$$F = 9x^2 - 25$$

L'ensemble d'étude est évidemment $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} F &= (3x)^2 - (5)^2 \\ &= (3x + 5)(3x - 5) \end{aligned}$$

Exemple 7: (Sans facteur commun)

$$G = (2x + 5)^2 - 9$$

L'ensemble d'étude est évidemment $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} G &= (2x + 5)^2 - (3)^2 \\ &= (2x + 5 + 3)(2x + 5 - 3) \\ &= (2x + 8)(2x + 2) \end{aligned}$$

On peut factoriser par 2 dans les deux parenthèses.

$$G = 2 \times (x + 4) \times 2 \times (x + 1) = 4(x + 4)(x + 1)$$

3.1 Opération sur les expressions rationnelles

1. Réduire une expression rationnelle :

Exemple :

$$A = \frac{2}{x+3} - \frac{3}{x-1}$$

L'ensemble d'étude est $\mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$

$$\begin{aligned} A &= \frac{2(x-1)}{(x+3)(x-1)} - \frac{3(x+3)}{(x+3)(x-1)} \\ &= \frac{2x-1}{2x-1} - \frac{3x+9}{3x+9} \\ &= \frac{x^2 - x + 3x - 3}{2x-1-3x-9} - \frac{x^2 - x + 3x - 3}{x^2 - x + 3x - 3} \\ &= \frac{x^2 + 2x - 3}{-x - 10} \\ &= \frac{-x - 10}{x^2 + 2x - 3} \end{aligned}$$

2. Simplifier une expression rationnelle :

Exemple :

$$B = \frac{x^2 - 6x + 9}{(x-3)(x+4)}$$

L'ensemble d'étude est $\mathbb{R} \setminus \{-4; 3\}$

$$\begin{aligned} B &= \frac{(x)^2 - 2(x)(3) + (3)^2}{(x-3)(x+4)} \\ &= \frac{(x-3)(x-3)}{(x-3)(x+4)} \\ &= \frac{x-3}{x+4} \end{aligned}$$

4 Comment démontrer des égalités ?

Pour démontrer une égalité, il y a deux méthodes :

▮ On transforme les deux membres séparément pour obtenir la même expression (ou le même résultat).

▮ On transforme un des deux membres pour obtenir le second.

Exemples :

- Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 + 4x - 7 = (x+2)^2 - 11$

On va développer le second membre :

Tout d'abord l'ensemble d'étude est évidemment $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a $(x+2)^2 - 11 = x^2 + 2(x)(2) + 2^2 - 11 = x^2 + 4x + 4 - 11 = x^2 + 4x - 7$
donc on obtient bien : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 4x - 7 = (x+2)^2 - 11$

- Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $(x+3)^2 - 25 = (x-2)(x+8)$

On va factoriser le premier membre :

Tout d'abord l'ensemble d'étude est $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a $(x+3)^2 - 25 = (x+3)^2 - (5)^2 = (x+3+5)(x+3-5) = (x+8)(x-2)$
donc on a bien : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x+3)^2 - 25 = (x+8)(x-2)$

- Démontrer que $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5(5+1)}{2}$

On calcul les deux membres séparément :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$\frac{5(5+1)}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

Donc on a bien : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5(5+1)}{2}$

5 Comment résoudre des équations ?

5.1 Définition

Une équation est une question :

Quelle est la valeur de l'inconnue (ou des inconnues) pour que l'égalité donnée soit vérifiée.

Exemple :

$3x + 5 = 7$ est la question: Quelle(s) est(sont) la (les) valeur(s) de x pour que $3x + 5$ soit égal à 7.

Vocabulaire :

- Une équation du premier degré à une inconnue est une équation comportant une seule inconnue et dont son exposant le plus grand est 1.
- Une équation du second degré à une inconnue est une équation comportant une seule inconnue et dont son exposant le plus grand est 2.

Exemples :

- ⇒ $4x + 7 = 6 - 5x$ est une équation du premier degré à une inconnue.
- ⇒ $(2y + 3)(3y - 5) = (2y + 7)(6 + 3y)$ est une équation du premier degré à une inconnue.
- ⇒ $v - \frac{5}{2} = \frac{8}{5} - v$ est une équation du premier degré à une inconnue.
- ⇒ $x^2 + 14x = -49$ est une équation du second degré à une inconnue.
- ⇒ $(2y + 3)(2y - 5) = (2y + 7)(6 + 3y)$ est une équation du second degré à une inconnue.
- ⇒ $(x - 3)^2 = 25$ est une équation du second degré à une inconnue.

On ne résout pas de la même façon les équations du premier degré et celle du second degré.

- Pour résoudre une équation du premier degré on développe.
- Pour résoudre une équation du second degré on factorise.

5.2 Équation du premier degré à une inconnue

Méthode de résolution :

1. Développer les deux membres.
2. Réduire les deux membres.
3. Faire apparaître les x dans un membre et le reste dans l'autre.
4. Trouver ensuite la (ou les) valeur(s) de x .
5. Conclure en donnant l'ensemble des solutions.

Ne pas oublier que pour chacune des étapes, on obtient des équations équivalentes. (Mettre le symbole $\Leftrightarrow$ entre chacune des étapes)

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $(2y + 3)(3y - 5) = (2y + 7)(6 + 3y)$

C'est une équation du premier degré à une inconnue, dont le domaine d'étude est $\mathbb{R}$.

$$(2y + 3)(3y - 5) = (2y + 7)(6 + 3y)$$

$$\Leftrightarrow 6y^2 - 10y + 9y - 15 = 12y + 6y^2 + 42 + 21y$$

$$\Leftrightarrow 6y^2 - y - 15 = 6y^2 + 33y + 42$$

$$\Leftrightarrow 6y^2 - 6y^2 - y - 33y = 42 + 15$$

$$\Leftrightarrow -34y = 67$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{67}{-34} = -\frac{67}{34}$$

Donc l'ensemble des solutions est : $S = \left\{-\frac{67}{34}\right\}$

5.3 Équation du second degré à une inconnue

Méthode de résolution :

1. Faire tout apparaître dans un seul membre.
2. Factoriser ce membre.
3. Résoudre l'équation produit obtenue.
5. Conclure en donnant l'ensemble des solutions.

Ne pas oublier que pour chacune des étapes, on obtient des équations équivalentes. (Mettre le symbole $\Leftrightarrow$ entre chacune des étapes)

Rappel :

Equations produits :

Une équation produit est une équation de la forme :
un produit de facteur égal à 0.
Pour résoudre ces équations, on utilise la règle :
Si $A \times B = 0$ alors $A = 0$ ou $B = 0$

Exemple :

On souhaite résoudre $(x - 5)(x + 6) = 0$

L'ensemble d'étude est $\mathbb{R}$.

$$(x - 5)(x + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 5 = 0 \text{ ou } x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \text{ ou } x = -6$$

L'ensemble des solutions est donc : $S = \{-6; 5\}$

Exemple d'équation du second degré à une inconnue :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $(x + 3)(x - 5) = (x + 3)(2x + 7)$

C'est une équation du second degré à une inconnue, dont le domaine d'étude est $\mathbb{R}$.

$$(x + 3)(x - 5) = (x + 3)(2x + 7)$$

$$\Leftrightarrow (x + 3)(x - 5) - (x + 3)(2x + 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 3)[(x - 5) - (2x + 7)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 3)(x - 5 - 2x - 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 3)(-x - 12) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 3 = 0 \text{ ou } -x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \text{ ou } -x = 12$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \text{ ou } x = -12$$

Donc l'ensemble des solutions est : $S = \{-12; -3\}$

✦ ✦ Fin du cours ✦ ✦