Fiche de synthèse (Chapitre 1 : Nombres/Arithmétique))

Exercice 1 :

On note $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$: le nombre d'or.

1. Démontrer que $\phi^2 = \phi + 1$
2. On suppose que ϕ s'écrive sous la forme d'une fraction irréductible $\dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
   p et q peuvent-ils être tous les deux pairs ?
3. A l'aide l'égalité démontrée au 1), prouver que $p^2 = q^2 + pq$.
4. En déduire que $p^2 - q^2 = pq$.
5. Si p et q sont tous les deux impairs, de quelle parité sont : pq , p^2 , q^2 et $p^2 - q^2$?
6. Étudier de même le cas où p est pair et q impair, puis le cas ou p est impair et q pair.
7. Que peut-on en déduire sur la nature du nombre ϕ ?

Exercice 2 :

Soient $a = 591500$ et $b = 280280$

1. Décomposer a et b en produits de facteurs premiers.
2. Simplifier la fraction $\dfrac{280280}{591500}$.
3. Simplifier $\sqrt{591500} \times \sqrt{280280}$.
4. Trouver le nombre de diviseurs de 591500.
5. Calculer le $Ppcm(591500; 280280)$.

Exercice 3 :

1. Décomposer 210 et 297 en produit de facteurs premiers.
2. On cherche à quadriller une feuille de format $A4$ (21 cm sur 29,7 cm) à l'aide d'un certain nombre de carrés ayant tous le même nombre entier de millimètres de côté.
   Donner toutes les possibilités.

Exercice 4 :

1. (a) Décomposer 132 et 72 en produits de facteurs premiers.
   (b) Simplifier $\dfrac{\sqrt{675}}{\sqrt{75}}$
2. On note $a = 270$ et $b = 396$.
   (a) Décomposer a et b en produits de facteurs premiers.
   (b) En déduire la décomposition de a^2, b^3, ab, a^2b et ab^2.
3. Déterminer l'ensemble des diviseurs entiers naturels de 605.

Exercice 5 :

Deux nombres entiers naturels sont amiables si et seulement si la somme des diviseurs propres de l'un est égal à l'autre.

1. (a) Déterminer les diviseurs entiers naturels de 220 et de 284.
   (b) Montrer que 220 et 284 sont amiables.
2. Montrer que 1184 et 1210 sont amiables.
3. Montrer que 2620 et 2924 sont amiables.

Exercice 6 :

On souhaite démontrer que si n est un entier supérieur à 1, alors le nombre $a = n^4 + 4$ n'est pas premier.

1. Vérifier cette propriété pour les entiers inférieurs à 10.
2. Factoriser $n^4 + 4n^2 + 4$.
3. En déduire une factorisation de a.
4. Conclure.