Fiche de synthèse (Chapitre 1 : Nombres/Arithmétique))

Exercice 1 :

On note $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ l'ensemble de tous les nombres de la forme $a + b\sqrt{2}$ avec $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$.
$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}$ tel que $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}\}$

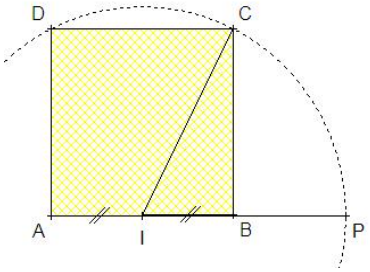
1. Choisir deux nombres u et v de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ de la forme $a + b\sqrt{2}$ tels que a et b n'appartiennent pas à $\mathbb{D}$.
2. Calculer la valeur exacte de $u + v$, $u - v$, $u \times v$ et $\dfrac{u}{v}$
3. Démontrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est stable pour la multiplication.
4. Explique pourquoi $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{R}$

Exercice 2 :

1. Retrouver une fraction dont l'écriture décimale est $1,04\underline{4}$
2. Montrer que $0,083\underline{3}$ est un rationnel.
3. Retrouver une fraction dont l'écriture décimale est $5 \times 0,34\underline{34} - 1$
4. Montrer que $3 \times 0,12\underline{12}$ est un rationnel.
5. Retrouver une fraction dont l'écriture décimale est $3,123\underline{123}$

Exercice 3 :

On considère un carré ABCD de côté 1. Le point I est le milieu de [AB]. Le cercle de centre I et de rayon IC coupe la demi-droite [IB) en P.



1. Calculer les distances IB, IC puis AP.
2. On note $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (ϕ se lit "phi" et s'appelle ***Le nombre d'or***)
   Démontrer que $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AB}{BP} = \phi$.
3. Donner l'arrondi au millionième de ϕ.
4. Calculer ϕ^2 et vérifier que $\phi^2 = \phi + 1$ et que $\phi^{-1} = \phi - 1$.
5. En déduire que $\phi^3 = 2\phi + 1$ et que $\phi^{-2} = -\phi + 2$
6. Exprimer de la même façon ϕ^4, ϕ^5 et ϕ^6 en fonction de ϕ.
7. Exprimer de la même façon ϕ^{-3}, ϕ^{-4} en fonction de ϕ.

Exercice 4 :

On pose : $\rho = \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$

1. Montrer que $2\rho^2 = 2\rho + 3$
2. En déduire que $2\rho^3 = 5\rho + 3$

Exercice 5 :

On pose : $\delta = \dfrac{1-\sqrt{11}}{2}$

1. Montrer que $2\delta^2 = 2\delta + 5$ puis en déduire que $2\delta^3 = 7\delta + 5$
2. Démontrer que $\varepsilon = \dfrac{-1-\sqrt{11}}{5}$ est l'inverse de δ
3. Montrer que $5\delta^{-1} = 2\delta - 2$ et en déduire que $25\delta^{-2} = -4\delta + 14$