LES VARIABLES ALÉATOIRES

La notion de variable aléatoire est née en même temps que le calcul des probabilités sans toutefois être repérée comme telle. C'est au cours du XVIIIème siècle qu'ont été découvertes la plupart des propriétés d'une variable aléatoire.
Les origines de la notion d'espérance, de variance et d'écart-type mathématique remontent au problème des parties de Pascal.
La notion de variable aléatoire, présente sans définition précise depuis l'origine de la discipline, apparaît alors comme une fonction définie sur l'univers.

Les contenus du chapitre

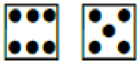
▷ Variables aléatoires réelles : modélisation du résultat numérique d'une expérience aléatoire, formalisation comme fonction définie sur l'univers et à valeurs réelles.
▷ Loi d'une variable aléatoire.
▷ Espérance, variance, écart-type d'une variable aléatoire.

Les capacités attendues du chapitre

▷ Interpréter en situation et utiliser les notations $\{X = a\}$, $\{X \leq a\}$, $P(X = a)$ et $P(X \leq a)$.
▷ Modéliser une situation à l'aide des variables aléatoires.
▷ Déterminer une loi de probabilité.
▷ Calculer une espérance, variance et écart-type.
▷ Utiliser la notion d'espérance dans une résolution de problème.

COURS

Dans tous le chapitre on va utiliser l'exemple suivant :
On lance deux dés non truqués l'un après l'autre et on note le nombre formé par les deux chiffres obtenus par les deux faces.



- Si on obtient un nombre premier alors on gagne 10 euros.
- Si on obtient un nombre multiple de 7, non premier, on gagne 5 euros.
- Si on obtient un multiple de 11, on gagne $2,5$ euros.
- Sinon on perd 7 euros.

Un nombre premier est un nombre qui n'est pas divisible par un autre nombre que lui-même et 1. Il admet excatement deux diviseurs, 1 et lui-même. 1 n'est pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur.

On note A l'événement : « obtenir un nombre premier », B : « obtenir un multiple de 7 », C :« obtenir un multiple de 11 non premier » et D : 'obtenir ni A, ni B et ni C ».

1. Définition et notation

Définition 1 – Variable aléatoire réelle

On note **variable aléatoire réelle** (v.a.r.e.) une fonction (notée X) qui à chaque issue d'une expérience aléatoire lui associe un nombre réel.

$$X : \omega_i \in \Omega \longmapsto k \in \mathbb{R}$$

On notera $\{X = k\}$ l'ensemble des issues dont l'image est k.

$$\{X = k\} = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) = k\}$$

Exemple :
Dans l'exemple du cours, on note X la variable aléatoire réelle qui à chaque événement du lancé de dés lui associe le gain ou la perte obtenue.

Activité numéro 1

Compléter le tableau ci-dessous en inscrivant le nombre obtenu après le lancer de deux dés (voir exemple en rouge) :

et	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3				34		
4						
5						
6						

Compléter le tableau ci-dessous :

$\{X = k\}$	$\{X = 10\}$	$\{X = 5\}$	$\{X = 2,5\}$	$\{X = -7\}$
$P(X = x_i)$			$\frac{5}{36}$	

(!! Fin de l'activité!!)

Définition 2 – Loi de probabilité

Définir **une loi de probabilité** de X (v.a.r.e) c'est associer à chaque événement $\{X = k\}$ la probabilité $P(X = k)$.
On présentera souvent une loi de probabilité dans un tableau comme celui-ci :

$\{X = k\}$	$\{X = k_1\}$	$\{X = k_2\}$	...	$\{X = k_{n-1}\}$	$\{X = k_n\}$
$P(X = k)$	$P(X = k_1)$	$P(X = k_2)$	...	$P(X = k_{n-1})$	$P(X = k_n)$

Propriété 1 – Somme des probabilités d'une loi

la somme des probabilités de X (v.a.r.e.) est égale à 1.

$$\sum_{i=1}^{n} P(X = k_i) = P(X = k_1) + P(X = k_2) + ... + P(X = k_{n-1}) + P(X = k_n) = 1$$

Démonstration

(!! A compléter par vous et à envoyer à la correction !!)

$\{X=k_1\}$, $\{X=k_2\}$, ... , $\{X=k_{n-1}\}$, $\{X=k_n\}$ forment une partition de l'univers donc :
$P(\Omega) = P(\{X=k_1\} \cup \{X=k_2\} \cup \ldots \cup \{X=k_{n-1}\} \cup \{X=k_n\})$
or les événements $\{X=k_1\}$, $\{X=k_2\}$, ... , $\{X=k_{n-1}\}$, $\{X=k_n\}$ sont ....
donc :
$P(\Omega) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

or $P(\Omega) = 1$

donc :

$$\sum_{i=1}^{n} P(X=k_i) = P(X=k_1) + P(X=k_2) + \ldots + P(X=k_{n-1}) + P(X=k_n) = \ldots\ldots\ldots$$

2. Paramètres d'une variable aléatoire réelle

2.1. l'espérance

Définition 3 – Espérance

On cherche un outil qui représente la valeur moyenne que l'on peut espérer si on répète un très grand nombre de fois la même expérience.
Cet outil se nomme l'espérance, se note $E(X)$ et se calcule de la façon suivante :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{n} k_i \times P(X=k_i) \\ &= k_1 P(X=k_1) + k_2 P(X=k_2) + \ldots + k_n P(X=k_n) \end{aligned}$$

On remarquera la correspondance avec, en statistique, le caclul de la moyenne à l'aide des fréquences :

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i \times f_i = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_{n-1} f_{n-1} + x_n f_n$$

Exercice :

Calculer l'espérance du jeu de dé présenté en début de chapitre.

2.2. La variance

Définition 4 – Variance

On cherche un outil qui représente la valeur moyenne des carrés des écarts à l'espérance des valeurs prises par X si on répète un très grand nombre de fois la même expérience.

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^{n} (k_i - E(X))^2 \times P(X = k_i) \\ &= (k_1 - E(X))^2 P(X = k_1) + \ldots + (k_n - E(X))^2 P(X = k_n) \end{aligned}$$

Propriété 2 – Formule de Koening-Huygens

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

où $E(X^2)$ représente l'espérance $E(X)$ mais en remplaçant leurs valeurs par leurs carrés.

Méthode 1 – Manipulation des sommes

Pour la démonstration on va utiliser quelques règles du symbole somme $\sum$.

▷ On peut distribuer une somme :

$$\sum_{i=1}^{n}(k_i+f_i)=\sum_{i=1}^{n}k_i+\sum_{i=1}^{n}f_i$$

▷ On peut factoriser par un nombre ne dépendant pas de l'indice i :

$$\sum_{i=1}^{n}a\times k_i=a\times\sum_{i=1}^{n}k_i$$

Cela se comprend mieux en écrivant sans la sommme :

$$(k_1+k_2+...+k_n)+(f_1+f_2+...+f_n)=(k_1+f_1)+(k_2+f_2)+...+(k_n+f_n)$$

$$ak_1+ak_2+...+ak_n=a(k_1+k_2+...+k_n)$$

Démonstration

$V(X)=\sum_{i=1}^{n}(k_i-E(X))^2\times P(X=k_i)$

or $(k_i-E(X))^2=$ ....

donc :

$V(X)=\sum_{i=1}^{n}(\text{..})\times P(X=k_i)$

V(X)=$\sum_{i=1}^{n}$ .... $\times P(X=k_i)-$ .... $\times P(X=k_i)+$ .... $\times P(X=k_i)$

$V(X)=\sum_{i=1}^{n}$ .... $\times P(X=k_i)-\sum_{i=1}^{n}$ .... $\times P(X=k_i)+\sum_{i=1}^{n}$ .... $\times P(X=k_i)$

$V(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\times P(X=k_i)-2E(X)\sum_{i=1}^{n}$ .... $\times P(X=k_i)+E^2(X)\sum_{i=1}^{n}\times P(X=k_i)$

Or $\sum_{i=1}^{n}\times P(X=k_i)=$ .... et $\sum_{i=1}^{n}\times x_iP(X=k_i)=$ ....

comme $E(X^2)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\times P(X=k_i)$ alors :

$V(X)=$ ....

Exercice :

Calculer la variance du jeu de dé présenté en début de chapitre.

2.3. L'écart-type

Définition 5 – Ecart-type

On cherche un outil qui représente la valeur moyenne des écarts à l'espérance des valeurs prises par X si on répète un très grand nombre de fois la même expérience.

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

Exercice :

(!! A faire par vous et à envoyer à la correction!!)

Calculer l'écart-type du jeu de dé présenté en début de chapitre.

3. Propriétés des paramètres

on note a et b deux réels.

Propriété 3 – Linéarité de l'espérance

$E(aX+b) = aE(x)+b$

Démonstration

(!! A compléter par vous et à envoyer à la correction!!)

$$E(aX+b) = \sum_{i=1}^{n}(ak_i+b)) \times P(aX+b = ak_i+b) = \sum_{i=1}^{n}(ak_i+b) \times P(X=k_i)$$

En utilisant les manipulations sur les somme $\sum$, démontrer cette propriété.

Propriété 4 – Propriété de la variance

$$V(aX+b) = a^2 V(X)$$

Démonstration

$$\begin{aligned} V(aX+b) &= \sum_{i=1}^{n} ((ak_i+b) - E(aX+b))^2 \times P(aX+b = ak_i+b) \\ &= \sum_{i=1}^{n} ((ak_i+b) - E(aX+b))^2 \times P(X = k_i) \end{aligned}$$

En utilisant les manipulations sur les somme $\sum$, démontrer cette propriété.

Propriété 5 – Propriété de l'écart-type

$$\sigma_{aX+b} = |a|\sigma_X$$

Démonstration

Exercice :
Pour la variable aléatoire du début du chapitre, calculer :

$\triangleright$ $E(2X-1)$, $V(2X-1)$ et σ_{2X-1}.