Chapitre 1

Le produit scalaire

La notion de vecteur était implicite en mécanique depuis Galilée mais a mis longtemps à prendre sa forme actuelle. On observe un lien entre analyse et géométrie en étudiant la façon dont la notion de vecteur apparait chez Leibniz au cours de ses recherches sur l'élaboration d'un calcul des variations. Le XIXe siècle voit l'élaboration conjointe de ce qui deviendra le produit scalaire et de la notion de travail en physique. Le calcul vectoriel et le produit scalaire permettent une approche de la géométrie différente de celle des Anciens, sans doute puissante, avec l'avantage de combiner vision géométrique et calcul.

Les contenus du chapitre

▷ Produit scalaire à partir de la projection orthogonale et de la formule avec le cosinus. orthogonalité

▷ Bilinéarité, symétrie. En base orthonormée, expression du produit scalaire et de la norme, critère d'orthognonalité.

▷ Développement de $\| \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \|^2$. Formules d'Al-Kashi

▷ Transformation de $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.

Les capacités attendues du chapitre

▷ Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, pour calculer un angle, une longueur dans le plan ou dans l'espace.

▷ En vue de la résolution d'un problème, calculer le produit scalaire de deux vecteurs en choisissant une méthode adaptée.

▷ Utiliser le produit scalaire pour résoudre un problème géométrique.

Cours

1. Quelques rappels sur les vecteurs

2. Produit scalaire entre deux vecteurs

2.1. Définition et Propriétés

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On note $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls.

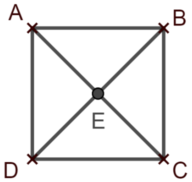
Définition 1 – Produit scalaire de deux vecteurs

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.
On note A, B et C trois points du plan tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$.

On appelle **produit scalaire** des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le nombre réel noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ défini par :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \| \overrightarrow{u} \| \times \| \overrightarrow{v} \| \times \cos(\widehat{BAC})$$

Exemples :
$ABCD$ est un carré de côté 5 cm.



▷ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$

▷ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} =$

▷ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} =$

▷ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} =$

⚠ Si l'un des vecteurs est nul alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$

Propriété 1 – Produit scalaire et commutativité

Pour tout $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ on a $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$

Démonstration

On note A, B et C tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ alors :

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \| \overrightarrow{AB} \| \times \| \overrightarrow{AC} \| \times \cos(\widehat{BAC})$

$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

or les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{CAB}$ sont $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

donc $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Propriété 2 – Produit scalaire et vecteurs colinéaires

On note $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs colinéaires.
Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{v}$.

- Si $\lambda > 0$ ($\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans le même sens) alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \| \overrightarrow{u} \| \times \| \overrightarrow{v} \|$
- Si $\lambda < 0$ ($\overrightarrow{u}$ dans le sens contraire de $\overrightarrow{v}$) alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = - \| \overrightarrow{u} \| \times \| \overrightarrow{v} \|$

Démonstration

On note A, B et C tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ alors :

- Si $\lambda > 0$ alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dans le même sens et $\widehat{BAC} = \ldots\ldots\ldots$ radians.

donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} &= \| \ldots\ldots \| \times \| \ldots\ldots \| \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) \\ &= \| \ldots\ldots \| \times \| \ldots\ldots \| \times \cos(\ldots\ldots) \\ &= \| \ldots\ldots \| \times \| \ldots\ldots \| \times\end{aligned}$$

- Si $\lambda < 0$ alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de sens contraire et $\widehat{BAC} = \ldots\ldots\ldots$ radians.

donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} &= \| \ldots\ldots \| \times \| \ldots\ldots \| \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) \\ &= \| \ldots\ldots \| \times \| \ldots\ldots \| \times \cos(\ldots\ldots) \\ &= \| \ldots\ldots \| \times \| \ldots\ldots \| \times\end{aligned}$$

Propriété 3 – Produit scalaire et vecteurs orthogonaux

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls, alors

$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$$

Démonstration

On note A, B et C tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ alors :

► Si $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ alors $\widehat{BAC} = \ldots\ldots\ldots$ radians.

donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} &= \| \ldots\ldots \| \times \| \ldots\ldots \| \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)\\ &= \| \ldots\ldots \| \times \| \ldots\ldots \| \times \cos(\ldots\ldots)\\ &= \| \ldots\ldots \| \times \| \ldots\ldots \| \times\\ &= \ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Définition 2 – Le carré scalaire

On nomme **carré scalaire de $\overrightarrow{u}$** le nombre réel noté $\overrightarrow{u}^2$ tel que

$$\overrightarrow{u}^2 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \| \overrightarrow{u} \|^2$$

Cela est évident puisque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires et de même sens.

2.2. Interprétation géométrique

On note $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
Soient O, A et B trois points du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$

Propriété 4 – Définition géométrique du produit scalaire

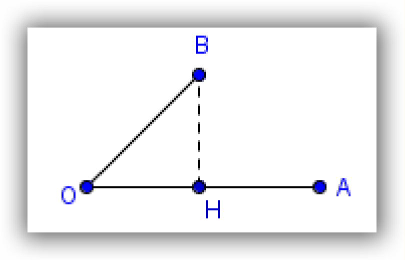
(Autre définition du produit scalaire)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$$

où H est le projeté orthogonal de B sur la droite (OA)

Démonstration

➠ Premier cas :



$\vec{u} \cdot \vec{v} = \| \overrightarrow{OA} \| \times \| \overrightarrow{OB} \| \times \cos(\widehat{AOB})$

or dans le triangle OHB rectangle en H :

$\cos(\widehat{AOB}) = \cos(\widehat{HOB}) = \dfrac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$

donc $\| \overrightarrow{OB} \| \times \cos(\widehat{AOB}) = \ldots\ldots\ldots$

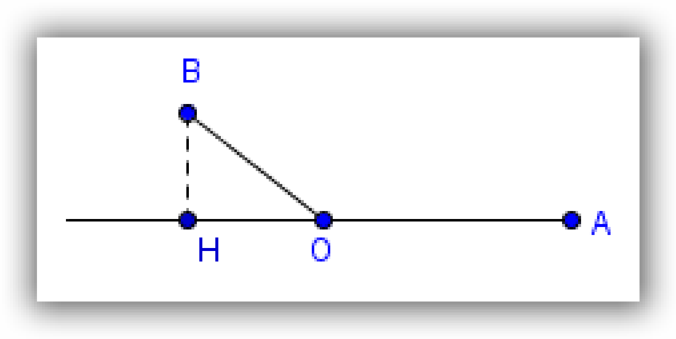
ainsi

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \| \overrightarrow{OA} \| \times \ldots\ldots\ldots$

or $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont colinéaires et de même sens donc :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \ldots\ldots$$

➠ Deuxième cas :



$\vec{u} \cdot \vec{v} = \| \overrightarrow{OA} \| \times \| \overrightarrow{OB} \| \times \cos(\widehat{AOB})$

or $\cos(\widehat{AOB}) = \cos(\pi - \widehat{BOH}) = \ldots\ldots\ldots$

donc

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \| \overrightarrow{OA} \| \times \| \overrightarrow{OB} \| \times (-\cos(\ldots\ldots\ldots))$

or dans le triangle OHB rectangle en H :

$\cos(\widehat{BOH}) = \dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

donc $\| \overrightarrow{OB} \| \times \cos(\widehat{BOH}) = \ldots\ldots\ldots$

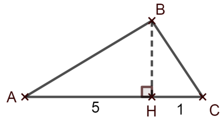
ainsi

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \| \overrightarrow{OA} \| \times \ldots\ldots\ldots$

or $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont colinéaires et de sens contraire :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \ldots\ldots$$

Exemple :



H est le projeté orthogonal (avec un angle droit) de B sur (AC) donc :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC}$

or $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \| \overrightarrow{AH} \| \times \| \overrightarrow{AC} \| = 5 \times 6 = 30$$

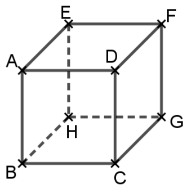
2.3. Produit scalaire et opérations

Propriété 5 – Distributivité du produit scalaire

(A admettre)
On note $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs.

$$(1)\ \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$
$$(2)\ (\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u}$$

Exemple :
$ABCDEFGH$ est un cube de côté 1.



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF}) \cdot \overrightarrow{BC} \\
&= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{BC} \\
&= \underbrace{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC}}_{\text{Colinéaires même sens}} + \underbrace{\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BC}}_{\text{orthogonaux}} + \underbrace{\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{BC}}_{\text{orthogonaux}} \\
&= \| BC \| \times \| BC \| + 0 + 0 \\
&= 1 \times 1 = 1
\end{aligned}$$

Propriété 6 – Linéarité du produit scalaire

On note $\vec{u}$, $\vec{v}$ et α un réel

$$\begin{aligned}&(1)\ \vec{u}\cdot(\alpha\vec{v}) = \alpha\vec{u}\cdot\vec{v}\\&(2)\ (\alpha\vec{u})\cdot\vec{v} = \alpha\vec{u}\cdot\vec{v}\end{aligned}$$

Démonstration

On va seulement démontrer la propriété (1) car la (2) se fait de la même façon.

► Premier cas : $\alpha = 0$

Alors $\vec{u}\cdot(\alpha\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{0} = 0$ et $\alpha\vec{u}\cdot\vec{v} = 0\times\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$
donc

$$\vec{u}\cdot(\alpha\vec{v}) = \alpha\vec{u}\cdot\vec{v}$$

► Deuxième cas : $\alpha > 0$

On note A, B, C et D quatre points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\alpha\vec{v} = \overrightarrow{AD}$
alors :
▷ $\| \alpha\overrightarrow{AC} \| = |\alpha|\,\| \dots\dots\dots \|$
or $\alpha > 0$ donc $|\alpha| = \alpha$
ainsi
$\| \alpha AC \| = \dots\dots\dots\dots$

▷ $\cos(\widehat{BAC}) = \cos(\widehat{BAD})$ car $\alpha > 0$ donc $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires de même sens.
ainsi :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot(\alpha\vec{v}) &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\\&= \dots\dots\dots\times\|\dots\dots\dots\|\cos(\dots\dots\dots)\\&= \dots\dots\dots\times\|\dots\dots\dots\|\times\|\dots\dots\dots\|\cos(\dots\dots\dots)\\&= \dots\dots\dots\ \vec{u}\cdot\vec{v}\end{aligned}$$

► Troisième cas : $\alpha < 0$
On note A, B, C et D quatre points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\alpha\vec{v} = \overrightarrow{AD}$
alors :
▷ $\| \alpha\overrightarrow{AC} \| = |\alpha|\,\| \dots\dots\dots \|$
or $\alpha < 0$ donc $|\alpha| = -\alpha$
ainsi
$\| \alpha AC \| = \dots\dots\dots\dots$

▷ $\cos(\widehat{BAD}) = \cos(\pi + \widehat{BAC})$ car $\alpha < 0$ donc $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires de sens contraire.

ainsi :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\cdot(\alpha\overrightarrow{v}) &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\\ &= \dots\dots\dots \times \| \dots\dots\dots \| \cos(\dots\dots\dots)\\ &= \dots\dots\dots \times \| \dots\dots\dots \| \times \| \dots\dots\dots \| \cos(\dots\dots\dots)\\ &= \dots\dots\dots\ \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\end{aligned}$$

Exemples :
On suppose que $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=4$
alors
▷ $\overrightarrow{u}\cdot(-\overrightarrow{v})=$

▷ $(-\overrightarrow{u})\cdot(-\overrightarrow{v})=$

▷ $3u\cdot(4\overrightarrow{v})=$

▷ $\left(-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{u}\right)\cdot(-4\overrightarrow{v})=$

2.4. Autres définitions du produit scalaire

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.

Propriété 7

$$(1)\ \| \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v} \|^2=\| \overrightarrow{u} \|^2+\| \overrightarrow{v} \|^2+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$$

$$(2)\ \| \overrightarrow{u}-\overrightarrow{v} \|^2=\| \overrightarrow{u} \|^2+\| \overrightarrow{v} \|^2-2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$$

$$(3)\ (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})=\| \overrightarrow{u} \|^2-\| \overrightarrow{v} \|^2$$

Démonstration

► Démontrons la formule (1) :
rappel :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}^2=\| \overrightarrow{u} \|^2$$

$$\begin{aligned}\| \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v} \|^2 &= \left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)\cdot\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)\\ &= \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}\\ &= \| \overrightarrow{u} \|^2+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\dots\dots\dots\\ &= \| \overrightarrow{u} \|^2+2\dots\dots\dots+\dots\dots\dots\end{aligned}$$

▶ Démontrons la formule (2) :

▶ Démontrons la formule (3) :

A l'aide des formules (1) et (2) nous pouvons définir le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de la façon suivante :

Propriété 8

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left[\| \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \|^2 - \| \overrightarrow{u} \|^2 - \| \overrightarrow{v} \|^2\right]$$

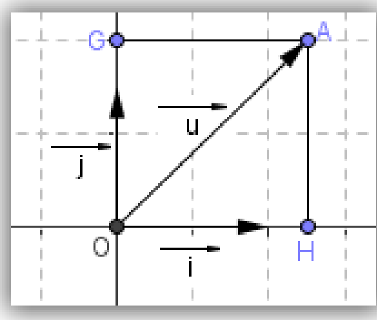
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left[\| \overrightarrow{u} \|^2 + \| \overrightarrow{v} \|^2 - \| \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \|^2\right]$$

Démonstration

3. Expression analytique du produit scalaire

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal et les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$

3.1. Coordonnées d'un vecteur



On a $\vec{i} \cdot \vec{u} = \vec{i} \cdot \overrightarrow{OH} = \vec{i} \cdot x_{\vec{u}} \vec{i} = x_{\vec{u}} \vec{i} \cdot \vec{i} = x_{\vec{u}}$
et
$\vec{j} \cdot \vec{u} = \vec{j} \cdot \overrightarrow{OG} = \vec{j} \cdot y_{\vec{u}} \vec{j} = y_{\vec{u}} \vec{j} \cdot \vec{j} = y_{\vec{u}}$

Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont $(\vec{i} \cdot \vec{u} ; \vec{j} \cdot \vec{u})$

Propriété 9 – Expression analytique du produit scalaire

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x \times x' + y \times y'$$

Démonstration

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé
donc
$\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$.

▷ $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ donc $\vec{u} = x \times \vec{i} + y \times \vec{j}$

▷ $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ donc $\vec{v} = \ldots\ldots \times \vec{i} + \ldots\ldots \times \vec{j}$

donc

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= (x\,\vec{i}+y\,\vec{j})\cdot(x'\,\vec{i}+y'\,\vec{j})\\ &= \ldots\ldots\ \vec{i}\cdot\vec{i}+\ldots\ldots\ \vec{i}\cdot\vec{j}+\ldots\ldots\ \vec{j}\cdot\vec{i}+\ldots\ldots\ \vec{j}\cdot\vec{j}\end{aligned}$$

or

▷ $\vec{i}$ et $\vec{i}$ sont colinéaires de même sens donc $\vec{i}\cdot\vec{i} = \ldots\ldots$

▷ $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux donc $\vec{i}\cdot\vec{j} = \ldots\ldots$

▷ $\vec{j}$ et $\vec{i}$ sont orthogonaux donc $\vec{j}\cdot\vec{i} = \ldots\ldots$

▷ $\vec{j}$ et $\vec{j}$ sont colinéaires de même sens donc $\vec{j}\cdot\vec{j} = \ldots\ldots$

conclusion

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple :

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 4\times(-3)+3\times 4 = -12+12 = 0$ donc $\vec{u}\perp\vec{v}$

cela nous donne un critère d'orthogonalité simple à utiliser.

4. Les différentes expressions du produit scalaire

Voilà donc les différentes expressions que l'on peut utiliser pour exprimer le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

Propriété 10

(1) $$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$$

(2) Si $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}$
avec H le projeté orthogonal de B sur la droite (OA)

(3) $$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right]$$

(4) $$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right]$$

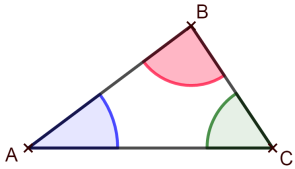
(5) Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ si les vecteurs ont pour coordonnées
$\vec{u}\,(x, y)$ et $\vec{v}\,(x', y')$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'$

5. Applications

5.1. Formules d'Al-Kashi

Les formules d'Al-Kashi permettent de calculer des longueurs ou des mesures d'angles dans un triangle.

Propriété 11 – Formules d'Al-Kashi



Dans la configuration ci-dessus, on a :

$$1)\, BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$2)\, AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC \times CB \times \cos(\widehat{ACB})$$

$$3)\, AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos(\widehat{ABC})$$

Démonstration

▶ Démontrons la formule (1) :
On va utiliser la propriété 7 de la page 9 :

$$BC^2 = \| \overrightarrow{BC} \|^2 = \| \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \|^2$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

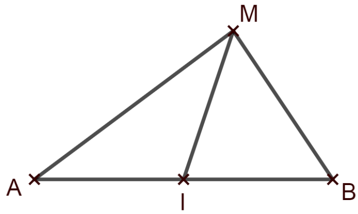
▶ Démontrons la formule (2) :

▶ Démontrons la formule (3) :

5.2. Formule de la mediane

Propriété 12 – Formule de la médiane

Soient deux points distincts A et B du plan et I le milieu du segment $[AB]$.
Pour tout point M du plan, on a :



$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \\
&= \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} \\
&= \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MI} \cdot (\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}
\end{aligned}$$

or

▷ $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MI} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

▷ $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

▷ $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

donc

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Propriété 13 – Application

L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Démonstration

On utilise la propriété précédente :