Chapitre 1

Droites et cercles

Les contenus du chapitre

▷ Vecteur normal à une droite. Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à la droite d'équation $ax + by + c = 0$. Le vecteur $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur.

▷ Equation de cercle.

Les capacités attendues du chapitre

▷ Déterminer une équation cartésienne de droite connaissant un point et un vecteur normal.
▷ Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite.
▷ Déterminer et utiliser l'équation d'un cercle donné par son centre et rayon.
▷ Reconnaître une équation de cercle, déterminer son centre et son rayon.

Cours

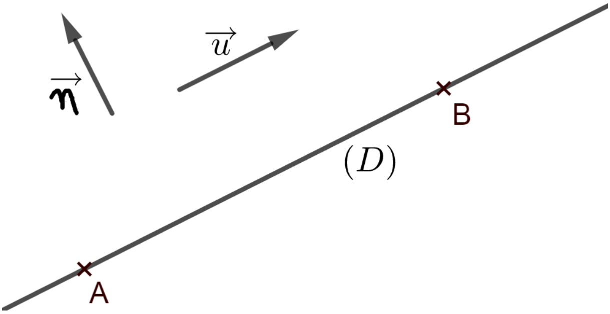
1. Equation cartésienne de droite

1.1. Vecteur directeur et vecteur normal à une droite

Définition 1 – Vecteur directeur et vecteur normal

▸ Un vecteur $\overrightarrow{u}$ directeur à la droite (D), a sa droite support(direction) qui est parallèle ou de même direction que (D).

▸ Un vecteur $\overrightarrow{n}$ normal à la droite (D), a sa droite support(direction) qui est perpendiculaire à (D).



Exercice 01 :

On note (D) la droite d'équation réduite $y = 2x + 3$. On note $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

1) Déterminer les coordonnées de deux points A et B de la droite (D).

2) Montrer (à l'aide du déterminant) que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.

3) Montrer (à l'aide du produit scalaire) que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux.

4) Que peut-on en déduire pour $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ par rapport à la droite (D).

Propriété 1 – Infinité des vecteurs directeur et normaux

Il y a une infinité de vecteurs directeurs de (D) et une infinité de vecteurs normaux à (D).

Démonstration

Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D) alors tout vecteur colinéaire à $\overrightarrow{u}$ est aussi ....de (D).

Si $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de (D) alors tout vecteur colinéaire à $\overrightarrow{n}$ est aussi ....de (D).

Exemples :

▷ Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ est directeur de (D) alors $\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{u}$ donc $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est aussi directeur de (D).

▷ Si $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix}$ est normal à (D) alors $\overrightarrow{v} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{n}$ donc $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est aussi normal à (D).

1.2. Equation cartésienne de droite

Une équation de droite est une relation algébrique reliant les abscisses et les ordonnées de tous les points de cette droite.

Exemple :
Si la droite a pour équation réduite $y = 2x + 3$ alors tous les points sur cette droite on l'ordonnée qui est égale au double de l'abscisse plus trois.

Définition 2 – Equation cartésienne d'une droite

Une équation cartésienne d'une droite est de la forme $ax + by + c = 0$, avec a et b non simultanément nuls et c un réel quelconque.

Exemple :
Soit (D) la droite d'équation réduite $y = 2x + 3$.

Alors cette droite admet comme équation cartésienne $2x - y + 3 = 0$ mais aussi $4x - 2y + 6 = 0$ mais aussi $x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2} = 0$ etc.

Propriété 2 – Infinité des équations cartésinne

Il y a une infinité d'équations cartésiennes possibles pour une droite (D).

Démonstration

L'équation réduite étant unique alors deux équations cartésiennes définissent la même droite lorsqu'elles ont le même équation réduite.

▷ Si $b \neq 0$ alors une équation cartésienne de (D) est $ax + by + c = 0$ d'équation réduite $y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$

Pour tout $k \in \mathbb{R}^*$, $kax + kby + kc = 0$ a pour équation réduite

$$y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

donc il y a une infinité d'équations cartésienne pour la droite (D).

▷ Si $b = 0$ et $a \neq 0$ alors une équation cartésienne de (D) est $ax + c = 0$ d'équation réduite $x = \ldots\ldots\ldots..$
Pour tout $k \in \mathbb{R}^*$, $kax + kc = 0$ a pour équation réduite

$$x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

donc il y a une infinité d'équations cartésienne pour la droite (D).

Propriété 3 – Equation cartésienne d'une droite

Toute droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$, avec a et b non simultanément nuls et c un réel quelconque.

Démonstration

On note (D) une droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et passant par $A(x_A; y_A)$.

On cherche une relation algébrique reliant x et y de n'importe quel point $M(x; y)$ de (D).

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
M(x;y)\in(D) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}=0\\
&\Leftrightarrow (x-x_A)\times a+(y-y_A)\times b=0\\
&\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

En notant $c=-ax_A-by_A$ alors on obtient la relation …………….

Méthode 1 – Recherche d'équations cartésienne

Méthode 01 : Avec un vecteur normal

Cette démonstration nous donne la méthode pour déterminer une équation cartésienne de droite loresqu'on connaît un vecteur normal et un point.

Exemple :

On cherche une équation cartésienne de (D) de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et passant par $A(1;1)$.
On cherche donc une relation algébrique reliant x et y de n'importe quel point $M(x;y)$ de (D).

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
M(x;y)\in(D) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{n}\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}=0\\
&\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Méthode 02 : Avec un vecteur directeur

Exemple :

On cherche une équation cartésienne de (D) de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et

passant par $A(1;1)$.
On cherche donc une relation algébrique reliant x et y de n'importe quel point $M(x;y)$ de (D).

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} M(x;y) \in (D) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM}\,;\,\overrightarrow{n}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Propriété 4 – Vecteur directeur et vecteur normal

$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à $(D) \Leftrightarrow \overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est directeur de (D)

Démonstration

▷ Si $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à (D) et si on note $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, alors :
$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ donc $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{u}$ sont orthogonaux et donc $\overrightarrow{u}$ est .... de (D).

▷ Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est directeur de (D) et si on note $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, alors :
$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ donc $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{u}$ sont orthogonaux et donc $\overrightarrow{n}$ est .... à (D).

Exemples :

▷ Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ est directeur de (D) alors $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{pmatrix}$ est normal à (D).

▷ Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ est normal à (D) alors $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{pmatrix}$ est directeur de (D).

▷ Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est directeur de (D) alors $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{pmatrix}$ est normal à (D).

1.3. Equation cartésienne de cercle

Une équation de cercle est une relation algébrique reliant les abscisses et les ordonnées de tous les points de ce cercle.

Propriété 5 – Equation cartésienne d'un cercle

Une équation cartésienne du cercle de centre $\Omega\left(x_\Omega ; y_\Omega\right)$ et de rayon R est :

$$(x - x_\Omega)^2 + \left(y - y_\Omega\right)^2 = R^2$$

Démonstration

On note (C) un cercle de centre $\Omega\left(x_\Omega ; y_\Omega\right)$ et de rayon R.
On cherche une relation algébrique reliant x et y de n'importe quel point $M(x; y)$ de (C).

$\overrightarrow{\Omega M}\begin{pmatrix} x - x_\Omega \\ y - y_\Omega \end{pmatrix}$.

$$M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow \| \overrightarrow{AM} \| = R$$

$$\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Méthode 2 – Déterminer une équation cartésienne de cercle

<u>Méthode 01</u> : Avec le centre et le rayon

On note (C) un cercle de centre $\Omega(2; 3)$ et de rayon $R = 2$.
On cherche une relation algébrique reliant x et y de n'importe quel point $M(x; y)$ de (C).

$\overrightarrow{\Omega M}\begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 3 \end{pmatrix}$.

$$
\begin{aligned}
M(x;y) \in (C) &\Leftrightarrow \| \overrightarrow{AM} \| = R \\
&\Leftrightarrow \| \overrightarrow{AM} \|^2 = R^2 \text{ (car } \| \overrightarrow{AM} \| > 0\text{)} \\
&\Leftrightarrow \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\Leftrightarrow \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\Leftrightarrow \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Méthode 02 : **De diamètre [AB]**

On note (C) un cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(-2;3)$ et $B(4;-2)$.

⚠ M est sur le cercle de diamètre $[AB]$ alors $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux.

On cherche une relation algébrique reliant x et y de n'importe quel point $M(x;y)$ de (C).

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+2 \\ y-3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-4 \\ y+2 \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
M(x;y) \in (C) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \\
&\Leftrightarrow \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\Leftrightarrow \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\Leftrightarrow \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Méthode 3 – Déterminer le centre et le rayon

En ayant l'équation d'un cercle, comment déterminer le centre et le rayon ?
En fait il faut transformer l'équation pour obtenir sa forme canonique :

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$$

Exemple :
Soit (C) le cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 4x + 6y = -5$
On cherche à déterminer le centre et le rayon de (C). On utilise la même technique que pour trouver la forme canonique des polynômes du second degré.

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 - 4x + 6y = -5 &\Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 + 6y = -5 \\
&\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

donc (C) est le cercle de centre $\Omega(2;-3)$ et de rayon $R = 2\sqrt{2}$.